Serie 24

Galoiserweiterungen, Galoisgruppen

1. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und seien E, E' zwei Zwischenkörper. Zeige, dass E und E' genau dann isomorph über K sind, wenn $\mathrm{Gal}(L/E)$ und $\mathrm{Gal}(L/E')$ in $\mathrm{Gal}(L/K)$ konjugiert sind.

2. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung mit Zwischenkörpern K_1 und K_2 und den entsprechenden Galoisgruppen $\Gamma_i := \mathrm{Gal}(L/K_i) \leqslant \Gamma := \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeige:

   (a) $K_1K_2 = L^{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}$,

   (b) $K_1 \cap K_2 = L^{\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle}$, wobei $\langle \Gamma_1, \Gamma_2 \rangle$ die von Γ_1 und Γ_2 erzeugte Untergruppe von Γ bezeichnet.

   (c) Gilt $K_1K_2 = L$ und $K_1 \cap K_2 = K$ und sind K_1/K und K_2/K beide galoissch, so ist $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

3. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und separabel und sei L ein Zerfällungskörper von f über K. Zeige: Ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch, so ist $L = K(a)$ für eine beliebige Nullstelle $a \in L$ von f.

4. Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ mitsamt Inklusionen sowie, falls sie galoissch über $\mathbb{Q}$ sind, deren Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$.

*5. In der Vorlesung wurde der Hauptsatz der Galoistheorie unter Verwendung des Satzes vom primitiven Element bewiesen. Man kann auch umgekehrt vorgehen, wenn man den Hauptsatz der Galoistheorie anders beweist, wie zum Beispiel in Miles Reids Vorlesungsnotizen, Abschnitt 4.3
`http://homepages.warwick.ac.uk/~masda/MA3D5/Galois.pdf`

   Dann zeigt man wie in der Vorlesung, dass jede endliche separable Erweiterung nur endlich viele Zwischenkörper hat.

   Folgere daraus direkt den Satz vom primitiven Element für jede endliche separable Erweiterung von unendlichen Körpern. (*Hinweis:* Zeige, dass ein Vektorraum über einem unendlichen Körper keine Vereinigung endlich vieler echter Unterräume ist.)