Serie 25

Galoiserweiterungen, transzendente Erweiterungen, Symmetrische Funktionen

1. Betrachte $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{R}$.
   (a) Zeige, dass $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist mit Galoisgruppe $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   (b) Sei $L := K\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(3+\sqrt{3})}\right) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ galoissch ist.
   (*c) Bestimme $[L/\mathbb{Q}]$.
   (*d) Bestimme $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bis auf Isomorphie.

2. Betrachte einen Körper der Form $K = \mathbb{C}(t, u)$ mit t, u algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$. Betrachte die Körpererweiterung $L = K(\alpha, \beta)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $X^n - t$ und β eine Nullstelle von $X^m - u$ ist. Finde ein primitives Element von L/K.

*3. Zeige, dass alle Transzendenzbasen einer Körpererweiterung L/K dieselbe Kardinalität haben, auch wenn sie unendlich sind.

4. Zeige für jeden Körperturm $M/L/K$ die Formel
$$\mathrm{trdeg}(M/K) = \mathrm{trdeg}(M/L) + \mathrm{trdeg}(L/K).$$

5. Zeige: Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann rein transzendent, wenn L isomorph über K zum Quotientenkörper eines Polynomrings über K ist.

*6. Zeige: Der *elliptische Funktionenkörper* $\mathbb{C}(x, y)$ für über $\mathbb{C}$ transzendente Elemente x und y mit $y^2 = x^3 - x$ ist nicht rein transzendent über $\mathbb{C}$.

   Hinweis: Ist $\mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(t)$, so schreibe $x = f/g$ mit teilerfremden Polynomen $f, g \in \mathbb{C}[t]$. Zeige dann, dass $f, g, f \pm g$ paarweise teilerfremde Quadrate in $\mathbb{C}[t]$ sind und folglich $x = s^2$ für ein über $\mathbb{C}$ transzendentes Element $s \in \mathbb{C}(t)$. Folgere aus $[\mathbb{C}(x, y)/\mathbb{C}(x)] = 2$, dass $\mathbb{C}(t) = \mathbb{C}(s)$ sein muss. Eine direkte Rechnung in dem Polynomring $\mathbb{C}[s]$ liefert jetzt schnell einen Widerspruch.

7. Schreibe die folgenden Ausdrücke in Termen der elementarsymmetrischen Polynome in $X_1, \ldots, X_n$:
   (a) $\sum_{i \neq j} X_i^3 X_j$.
   (b) $\sum_i X_i^4$.
   (c) $\sum_{i \neq j \neq k \neq i} X_i^2 X_j^2 X_k^2$.
   (d) $\sum_{i \neq j} X_i / X_j$.