Serie 26

Symmetrische Funktionen, Resultante

1. Seien $S_1 = X + Y + Z$ und $S_2 = XY + XZ + YZ$ und $S_3 = XYZ$ die elementarsymmetrischen Polynome in drei Variablen. Für alle $n \geqslant 1$ definiere $F_n := X^n + Y^n + Z^n$. Zeige, dass für $n \geqslant 4$ die folgende Rekursionsformel gilt:

$$F_n = S_1 F_{n-1} - S_2 F_{n-2} + S_3 F_{n-3},$$

   und berechne F_n für alle $n = 1, \ldots, 5$.

2. Betrachte einen Körper K und eine natürliche Zahl $n \geqslant 2$. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Variable über K, und seien $S_1, \ldots, S_n$ ihre elementarsymmetrischen Polynome.

   (a) Zeige: Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist $K(X_1, \ldots, X_n)^{A_n} = K(S_1, \ldots, S_n, E)$ für das Polynom $E := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_i - X_j)$.

   (b) Bestimme $K(X_1, \ldots, X_n)^{A_n}$ im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$.

3. Bestimme die Resultante folgender ganzzahliger Polynome bis aufs Vorzeichen:

   (a) $X^3 - X + 1$ und $X^2 + X + 3$.

   (b) $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1$ und $X^{m-1} + X^{m-2} \cdots + 1$ für teilerfremde n und m.

   Für welche p haben sie gemeinsame Nullstellen in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p?

   (Dafür dürfen alle Formeln aus §7.4 der Zusammenfassung benutzt werden.)

**4. Betrachte den Polynomring $R := \mathbb{Z}[A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m]$ und eine weitere Variable X. Betrachte die Polynome $F(X) = \sum_{i=0}^{m} A_i X^i$ und $G(X) = \sum_{j=0}^{n} B_j X^j$ in $R[X]$, und sei $H \in R$ deren Resultante bezüglich X. Zeige, dass H ein irreduzibles Element von R ist.

5. In der Linearen Algebra wurde gezeigt: Für beliebige Elemente $a_1, \ldots, a_n$ eines kommutativen unitären Rings hat die Matrix $A = (a_i^{j-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ die *Vandermonde-Determinante*

$$\det(A) \;=\; \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

   Beweise diese Formel mit der Methode, mit der in der Vorlesung die Formel für die Resultante in Termen der Nullstellen der beteiligten Polynome gezeigt wurde.

6. Sei R ein Ring, und betrachte das Polynom $f(X) = X^m + aX + b \in R[X]$ mit $m \geqslant 2$. Verifiziere die folgende Formel für die Diskriminante von f:

$$\mathrm{Disc}_f = (-1)^{m(m-1)/2}[(1-m)^{m-1}a^m + m^m b^{m-1}].$$

7. Bestimme für jedes der folgenden ganzzahligen Polynome f, ob es separabel in $\mathbb{Q}[X]$ ist, sowie für welche Primzahlen f mod (p) separabel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.

   (a) $f(X) = X^5 + 5X + 5$,

   (b) $f(X) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$.

   (c) $f(X) = X^5 + 2X^3 + 4$,

   Wie geht es schneller: mit der Diskriminante oder durch Berechnung des grössten gemeinsamen Teilers des Polynoms f und seiner Ableitung f' ?