

Serie 27

KREISTEILUNGSKÖRPER, ABELSCHER KÖRPERERWEITERUNGEN

1. Sei $\underline{X} := (X_1, X_2, X_3, X_4)$ ein Satz unabhängiger Variablen über einem Körper K , und sei $\underline{S} := (S_1, S_2, S_3, S_4)$ das Tupel der zugehörigen elementarsymmetrischen Polynome.

(a) Bestimme ein primitives Element der Erweiterung $K(\underline{X})/K(\underline{S})$.

(b) Sei $\Delta := \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \triangleleft S_4$ die Kleinsche Vierergruppe. Bestimme $K(\underline{X})^\Delta$ durch explizite Erzeugende über $K(\underline{S})$.

2. Sei $n \geq 3$ und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n -te Einheitswurzel. Zeige:

$$\mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$$

und bestimme den Grad $[\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})]$.

3. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive 15-te Einheitswurzel. Erstelle eine Liste aller Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ mitsamt Inklusionen.

4. Konstruiere ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 5 mit Galoisgruppe $\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Beschreibe die komplexen Nullstellen von f durch Radikale.

5. (*Artin-Schreier Theorie*) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Sei L/K galoissch mit $\Gamma := \text{Gal}(L/K) = \langle \gamma \rangle$ zyklisch der Ordnung p .

(a) Bestimme die Jordansche Normalform von γ betrachtet als Endomorphismus des K -Vektorraumes L .

(b) Zeige: Es existiert ein $a \in L$ mit $\gamma(a) = a + 1$.

(c) Zeige: Es existiert ein $a \in L$ mit $L = K(a)$ und $a^p - a \in K$.

Vergleiche Serie 22 Aufgabe 3.

*6. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad m . Für jedes $\alpha \in L$ ist die Norm $N_{L/K}(\alpha)$ definiert als Determinante der K -linearen Abbildung $\mu_\alpha: L \rightarrow L$, $x \mapsto \alpha x$. Zeige:

- (a) Ist $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ das Minimalpolynom von $\alpha \in L$ über K , so gilt $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^m a_0^{m/n}$.
- (b) Die Norm induziert einen Homomorphismus $L^\times \rightarrow K^\times$, $\alpha \mapsto N_{L/K}(\alpha)$.
- (c) Ist L/K separabel und $\text{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ für einen algebraischen Abschluss \overline{K} von K , so gilt $N_{L/K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_m(\alpha)$.
- (d) (*Hilberts Satz 90*) Ist L/K galoissch und $\text{Gal}(L/K)$ zyklisch mit Erzeugendem σ und ist $\alpha \in L^\times$ mit $N_{L/K}(\alpha) = 1$, so ist $\alpha = \sigma(\beta)/\beta$ für ein $\beta \in L^\times$.

*7. (*Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms*) Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ ist das n -te Kreisteilungspolynom definiert durch $\Phi_n(X) := \prod (X - \zeta)$, wobei ζ alle Einheitswurzeln in \mathbb{C} der genauen Ordnung n durchläuft. Zeige:

- (a) Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$X^n - 1 = \prod_{m|n} \Phi_m(X).$$

- (b) Jedes Φ_n ist ein normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[X]$.

Sei nun $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normierter irreduzibler Faktor von Φ_n mit Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$.

- (c) Zeige: Für jede nichtnegative ganze Zahl k existiert ein eindeutiges Polynom $g_k \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\deg(g_k) < \deg(f)$ und $f(\xi^k) = g_k(\xi)$. Zeige ausserdem, dass die Menge $\{g_k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ endlich ist.
- (d) Sei $a := \sup\{|u| : u \text{ ist Koeffizient eines } g_k\}$. Zeige: Ist $k = p$ prim, so teilt p alle Koeffizienten von g_p . Schliesse daraus, dass für alle $p > a$ das Polynom g_p gleich Null ist. [*Hinweis: $f(\xi^p) = f(\xi^p) - f(\xi)^p$*]
- (e) Folgere: Wenn alle Primfaktoren einer ganzen Zahl m grösser als a sind, dann gilt $f(\xi^m) = 0$.
- (f) Zeige: Für jede zu n teilerfremde ganze Zahl r gilt $f(\xi^r) = 0$. [*Hinweis: Betrachte $m := r + n \prod_{p \leq a, p \nmid r} p$.*]
- (g) Zeige, dass das n -te Kreisteilungspolynom Φ_n irreduzibel ist.