

## Serie 27

### KREISTEILUNGSKÖRPER, ABELSCHER KÖRPERERWEITERUNGEN

1. Sei  $\underline{X} := (X_1, X_2, X_3, X_4)$  ein Satz unabhängiger Variablen über einem Körper  $K$ , und sei  $\underline{S} := (S_1, S_2, S_3, S_4)$  das Tupel der zugehörigen elementarsymmetrischen Polynome.
  - (a) Bestimme ein primitives Element der Erweiterung  $K(\underline{X})/K(\underline{S})$ .
  - (b) Sei  $\Delta := \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \triangleleft S_4$  die Kleinsche Vierergruppe. Bestimme  $K(\underline{X})^\Delta$  durch explizite Erzeugende über  $K(\underline{S})$ .
2. Sei  $n \geq 3$  und  $\zeta \in \mathbb{C}$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel. Zeige:

$$\mathbb{Q}(\zeta) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$$

und bestimme den Grad  $[\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})]$ .

3. Sei  $\zeta \in \mathbb{C}$  eine primitive 15-te Einheitswurzel. Erstelle eine Liste aller Zwischenkörper der Erweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$  mitsamt Inklusionen.
4. Konstruiere ein irreduzibles Polynom  $f \in \mathbb{Q}[X]$  vom Grad 5 mit Galoisgruppe  $\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ . Beschreibe die komplexen Nullstellen von  $f$  durch Radikale.
5. (*Artin-Schreier Theorie*) Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$ . Sei  $L/K$  galoissch mit  $\Gamma := \text{Gal}(L/K) = \langle \gamma \rangle$  zyklisch der Ordnung  $p$ .
  - (a) Bestimme die Jordansche Normalform von  $\gamma$  betrachtet als Endomorphismus des  $K$ -Vektorraumes  $L$ .
  - (b) Zeige: Es existiert ein  $a \in L$  mit  $\gamma(a) = a + 1$ .
  - (c) Zeige: Es existiert ein  $a \in L$  mit  $L = K(a)$  und  $a^p - a \in K$ .

Vergleiche Serie 22 Aufgabe 3.

\*6. Sei  $L/K$  eine endliche Körpererweiterung vom Grad  $m$ . Für jedes  $\alpha \in L$  ist die Norm  $N_{L/K}(\alpha)$  definiert als Determinante der  $K$ -linearen Abbildung  $\mu_\alpha: L \rightarrow L$ ,  $x \mapsto \alpha x$ . Zeige:

- (a) Ist  $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$  das Minimalpolynom von  $\alpha \in L$  über  $K$ , so gilt  $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^m a_0^{m/n}$ .
- (b) Die Norm induziert einen Homomorphismus  $L^\times \rightarrow K^\times$ ,  $\alpha \mapsto N_{L/K}(\alpha)$ .
- (c) Ist  $L/K$  separabel und  $\text{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$  für einen algebraischen Abschluss  $\overline{K}$  von  $K$ , so gilt  $N_{L/K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_m(\alpha)$ .
- (d) (*Hilberts Satz 90*) Ist  $L/K$  galoissch und  $\text{Gal}(L/K)$  zyklisch mit Erzeugendem  $\sigma$  und ist  $\alpha \in L^\times$  mit  $N_{L/K}(\alpha) = 1$ , so ist  $\alpha = \sigma(\beta)/\beta$  für ein  $\beta \in L^\times$ .

\*7. (*Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms*) Für jede ganze Zahl  $n \geq 1$  ist das  $n$ -te Kreisteilungspolynom definiert durch  $\Phi_n(X) := \prod (X - \zeta)$ , wobei  $\zeta$  alle Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}$  der genauen Ordnung  $n$  durchläuft. Zeige:

- (a) Für jedes  $n \geq 1$  gilt

$$X^n - 1 = \prod_{m|n} \Phi_m(X).$$

- (b) Jedes  $\Phi_n$  ist ein normiertes Polynom in  $\mathbb{Z}[X]$ .

Sei nun  $f \in \mathbb{Z}[X]$  ein normierter irreduzibler Faktor von  $\Phi_n$  mit Nullstelle  $\xi \in \mathbb{C}$ .

- (c) Zeige: Für jede nichtnegative ganze Zahl  $k$  existiert ein eindeutiges Polynom  $g_k \in \mathbb{Z}[X]$  mit  $\deg(g_k) < \deg(f)$  und  $f(\xi^k) = g_k(\xi)$ . Zeige ausserdem, dass die Menge  $\{g_k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$  endlich ist.
- (d) Sei  $a := \sup\{|u| : u \text{ ist Koeffizient eines } g_k\}$ . Zeige: Ist  $k = p$  prim, so teilt  $p$  alle Koeffizienten von  $g_p$ . Schliesse daraus, dass für alle  $p > a$  das Polynom  $g_p$  gleich Null ist. [*Hinweis:  $f(\xi^p) = f(\xi^p) - f(\xi)^p$* ]
- (e) Folgere: Wenn alle Primfaktoren einer ganzen Zahl  $m$  grösser als  $a$  sind, dann gilt  $f(\xi^m) = 0$ .
- (f) Zeige: Für jede zu  $n$  teilerfremde ganze Zahl  $r$  gilt  $f(\xi^r) = 0$ . [*Hinweis: Betrachte  $m := r + n \prod_{p \leq a, p \nmid r} p$ .*]
- (g) Zeige, dass das  $n$ -te Kreisteilungspolynom  $\Phi_n$  irreduzibel ist.