D-MATH | Algebra II | FS 2023
Prof. Richard Pink

Serie 28

Auflösung durch Radikale, Bestimmung der Galoisgruppe

1. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom, dessen Grad eine Primzahl p ist und das genau zwei nicht reelle Nullstellen hat. Beweise, dass die Galoisgruppe von f gleich S_p ist.

2. Sei $p > 11$ eine Primzahl. Zeige, dass die Gleichung $X^5 - pX + p = 0$ über $\mathbb{Q}$ nicht durch Radikale auflösbar ist.

3. Sei $K := \mathbb{Q}(\zeta)$ für eine Einheitswurzel $\zeta \in \mathbb{C}$ der Ordnung 7.

   (a) Beschreibe alle Zwischenkörper von $K/\mathbb{Q}$.

   (b) Gib Erzeugende in Termen von Radikalen an.

4. Seien $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Zeige, dass jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X] \smallsetminus \{0\}$ vom Grad $n \leqslant 9$ mit der Eigenschaft $f(X) = \varepsilon X^n f(\delta X^{-1})$ auflösbar durch Radikale ist.

5. Sei $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ ein separables normiertes Polynom vom Grad 3 mit der Diskriminante Δ. Zeige:

   (a) Es gilt $\Delta > 0$, falls alle Nullstellen von f reell sind, andernfalls $\Delta < 0$.

   (b) Falls f genau eine reelle Nullstelle hat, so enthält die Lösungsformel dafür nur reelle Quadrat- und dritte Wurzeln.

   (c) Im Gegensatz dazu erfordert die Lösungsformel ausgerechnet dann eine dritte Wurzel aus einer nicht-reellen komplexen Zahl, wenn f drei reelle Nullstellen hat (*"Casus irreducibilis"*).

   *(d) Versuche zu erklären, wieso der Umstand aus (c) unvermeidbar ist, also weshalb die Nullstellen von f, selbst wenn sie reell sind, im Allgemeinen nicht mit reellen Radikalen ausgedrückt werden können.

6. Betrachte ein Polynom der Form $f(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ über einem Körper K der Charakteristik 0. Ziel dieser Aufgabe ist es, explizite Lösungsformeln für die Nullstellen von f in Termen der vier Grundrechenarten sowie von zweiten und dritten Wurzeln zu finden. Schreibe dafür

$$f(X) = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)$$

über einem Zerfällungskörper $L = K(a_1, a_2, a_3, a_4)$ von f und setze

$$\left\{\begin{array}{lcl} b_1 & := & a_1a_2 + a_3a_4 \\ b_2 & := & a_1a_3 + a_2a_4 \\ b_3 & := & a_1a_4 + a_2a_3 \end{array}\right\} \quad \text{sowie} \quad \left\{\begin{array}{lcl} c_1 & := & a_1 + a_2 - a_3 - a_4 \\ c_2 & := & a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ c_3 & := & a_1 - a_2 - a_3 + a_4 \end{array}\right\}.$$

(a) Zeige, dass nach einer Substitution der Form $X = Y + \alpha$ für ein geeignetes $\alpha \in K$ der Koeffizient von Y^3 verschwindet. Im folgenden nehmen wir daher $a = 0$ an, damit die Formeln einfacher werden.

(b) Berechne das Polynom $g(Y) := (Y - b_1)(Y - b_2)(Y - b_3)$ durch eine explizite Formel in $\mathbb{Q}[b, c, d][Y]$.

(c) Gib Lösungsformeln für b_1, b_2, b_3 an aus der Theorie der kubischen Gleichung.

(d) Berechne c_1^2, c_2^2, c_3^2 durch explizite Formeln in $\mathbb{Q}[b, c, d, b_1, b_2, b_3]$.

(e) Berechne a_1, a_2, a_3, a_4 durch explizite Formeln in $\mathbb{Q}[b, c, d, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3]$.

Nehmen wir jetzt zusätzlich an, dass f die Galoisgruppe S_4 hat. Zeige dann:

(f) Das Polynom $g(Y) \in K[Y]$ hat die Galoisgruppe S_3.

(g) Der zu der Kleinschen Vierergruppe $H < S_4$ gehörende Zwischenkörper ist $K(b_1, b_2, b_3)$.

7. Bestimme die Galoisgruppen der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$:

(a) $f(X) = X^5 + X^3 - 2X + 5$

(b) $g(X) = X^4 - 2X^3 + 2X + 3$

(c) $h(X) = X^4 + 3X^3 + 3X + 1$