

Single Choice Aufgaben 15

ELEMENTARTEILERSATZ, MODULN

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Matrizen über \mathbb{Z} hat die Elementarteiler 1 und 4?
 - (a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
 - (b) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
 - (c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
 - (d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
2. Welche Aussage über einen Hauptidealring R ist im Allgemeinen *falsch*?
 - (a) Eine Matrix A über R hat ersten Elementarteiler 1 genau dann, wenn A eine Zeile besitzt, deren Einträge teilerfremd sind.
 - (b) Für beliebige teilerfremde $a_1, \dots, a_n \in R$ existiert eine $n \times n$ -Matrix über R mit der ersten Zeile (a_1, \dots, a_n) , die den ersten Elementarteiler 1 hat.
 - (c) Für jede Matrix A über R hat A^T dieselben Elementarteiler wie A .
 - (d) Für jede Wahl von Elementen $e_1, \dots, e_n \in R \setminus \{0\}$ mit $e_1|e_2|\dots|e_n$ existiert eine $n \times 2n$ -Matrix B mit den Elementarteilern e_1, \dots, e_n .
3. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
 - (a) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ ist R/\mathfrak{a} ein R -Modul.
 - (b) Je zwei von einem Element erzeugte R -Moduln sind isomorph.
 - (c) Jeder R -Untermodul von R ist ein Ideal.
 - (d) Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Dann ist \mathfrak{a} ein Untermodul des R -Modul R .
4. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?
 - (a) Ein Homomorphismus von R -Moduln ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er bijektiv ist.
 - (b) Für je zwei R -Moduln M_1 und M_2 existiert ein R -Modul-Homomorphismus $M_1 \rightarrow M_2$.
 - (c) Für jeden surjektiven R -Modul-Homomorphismus $\varphi: M_1 \twoheadrightarrow M_2$ existiert ein Untermodul N von M_1 , so dass M_1/N zu M_2 isomorph ist.
 - (d) Für jeden surjektiven R -Modul-Homomorphismus $\varphi: M_1 \twoheadrightarrow M_2$ existiert ein Untermodul N von M_1 , so dass N zu M_2 isomorph ist.

5. Seien R ein Ring und M ein R -Modul. Sei $n \geq 1$, und für jedes $1 \leq i \leq n$ sei M_i ein Untermodul von M . Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

- (a) Der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n M_i$ ein Untermodul von M .
- (b) Die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n M_i$ ein Untermodul von M .
- (c) Die direkte Summe $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ ist ein Untermodul von M^n .
- (d) Ist jedes M_i frei von endlichem Rang, so auch $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.