Musterlösung Single Choice Aufgaben 15

Elementarteilersatz, Moduln

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Matrizen über $\mathbb{Z}$ hat die Elementarteiler 1 und 4?

   (a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   Erklärung: Der erste Elementarteiler e_1 ist immer der grösste gemeinsame Teiler aller Einträge der Matrix, also schliesst die Bedingung $e_1 = 1$ den Fall (a) aus. Sodann ist das Produkt e_1e_2 der ersten beiden Elementarteiler der grösste gemeinsame Teiler aller 2×2-Unterdeterminanten der Matrix. In den Fällen (b) bis (d) sind diese respektive gleich 4, 3, 2. Also ist $e_1e_4 \sim 1 \cdot 4 = 4$ nur im Fall (b).

2. Welche Aussage über einen Hauptidealring R ist im Allgemeinen *falsch*?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Eine Matrix A über R hat ersten Elementarteiler 1 genau dann, wenn A eine Zeile besitzt, deren Einträge teilerfremd sind.

   (b) Für beliebige teilerfremde $a_1, \ldots, a_n \in R$ existiert eine $n \times n$-Matrix über R mit der ersten Zeile $(a_1, \ldots, a_n)$, die den ersten Elementarteiler 1 hat.

   (c) Für jede Matrix A über R hat A^T dieselben Elementarteiler wie A.

   (d) Für jede Wahl von Elementen $e_1, \ldots, e_n \in R \setminus \{0\}$ mit $e_1|e_2|\ldots|e_n$ existiert eine $n \times 2n$-Matrix B mit den Elementarteilern $e_1, \ldots, e_n$.

   Erklärung: Der erste Elementarteiler einer Matrix ist der grösste gemeinsame Teiler ihrer Koeffizienten, aber nicht nur der einer Zeile. Konkret hat die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ über $R = \mathbb{Z}$ den ersten Elementarteiler 1 und ist damit ein Gegenbeispiel zu (a). Dagegen ist (b) richtig für *jede* $n \times n$-Matrix mit der ersten Zeile $(a_1, \ldots, a_n)$. Sodann ist (c) korrekt, denn wenn $UAV = \left(\begin{smallmatrix} D & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$ die im Elementarteilersatz geforderte Gestalt mit einer Diagonalmatrix D hat, so gilt dasselbe für $V^TA^TU^T = (UAV)^T = \left(\begin{smallmatrix} D & O \\ O & O \end{smallmatrix}\right)$. Schliesslich ist (d) richtig mit $B = (D, O)$, wobei D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $e_1, \ldots, e_n$ ist.

3. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ ist $R/\mathfrak{a}$ ein R-Modul.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Je zwei von einem Element erzeugte R-Moduln sind isomorph.

   (c) Jeder R-Untermodul von R ist ein Ideal.

   (d) Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Untermodul des R-Modul R.

   Erklärung: Für $R = \mathbb{Z}$ sind die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ beide von einem Element erzeugt, können aber nicht isomorph sein, weil die Mengen nicht die gleiche Kardinalität haben. Also ist (b) falsch. Die Aussagen (a), (c) und (d) wurden hingegen in der Vorlesung besprochen.

4. Sei R ein Ring. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Ein Homomorphismus von R-Moduln ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er bijektiv ist.

   (b) Für je zwei R-Moduln M_1 und M_2 existiert ein R-Modul-Homomorphismus $M_1 \to M_2$.

   (c) Für jeden surjektiven R-Modul-Homomorphismus $\varphi\colon M_1 \twoheadrightarrow M_2$ existiert ein Untermodul N von M_1, so dass M_1/N zu M_2 isomorph ist.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für jeden surjektiven R-Modul-Homomorphismus $\varphi\colon M_1 \twoheadrightarrow M_2$ existiert ein Untermodul N von M_1, so dass N zu M_2 isomorph ist.

   Erklärung: Aussage (a) wurde in der Vorlesung besprochen, und Aussage (b) gilt für den Null-Homomorphismus. Aussage (c) folgt aus dem Homomorphiesatz mit $N = \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dafür ist (d) falsch, zum Beispiel für den $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, denn kein Untermodul $N \subset \mathbb{Z}$ enthält ein Element $n \neq 0$ mit $2n = 0$.

5. Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Sei $n \geqslant 1$, und für jedes $1 \leqslant i \leqslant n$ sei M_i ein Untermodul von M. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n M_i$ ein Untermodul von M.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n M_i$ ein Untermodul von M.

   (c) Die direkte Summe $\boxplus_{i=1}^n M_i$ ist ein Untermodul von M^n.

   (d) Ist jedes M_i frei von endlichem Rang, so auch $\boxplus_{i=1}^n M_i$.

   Erklärung: Aussage (b) ist falsch im Fall $R \neq 0$ und $M = R^2$ mit den Untermoduln $M_1 = \langle \binom{1}{0} \rangle$ und $M_2 = \langle \binom{0}{1} \rangle$. Dagegen wurde (a) in der Vorlesung besprochen. Sodann ist (c) eine direkte Folge davon, dass die Addition und Multiplikation der direkten Summe $M^n = \boxplus_{i=1}^n M$ komponentenweise definiert sind. Schliesslich ist das kartesische Produkt von Isomorphismen $R^{r_i} \xrightarrow{\sim} M_i$ ein Isomorphismus $R^{r_1+\ldots+r_n} \cong \boxplus_{i=1}^n R^{r_i} \xrightarrow{\sim} \boxplus_{i=1}^n M_i$, also gilt (d).