

# Single Choice Aufgaben 16

## MODULN ÜBER HAUPTIDEALRINGEN, JORDANSCHER NORMALFORM

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Produktzerlegungen von Ringen ist korrekt?
  - (a)  $\mathbb{Z}/(360) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$
  - (b)  $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
  - (c)  $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
  - (d)  $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
2. Für jede ganze Zahl  $n \geq 1$  betrachte den endlichen  $\mathbb{Z}$ -Modul  $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Welcher der folgenden  $\mathbb{Z}$ -Moduln ist nicht isomorph zu den anderen?
  - (a)  $Z_2 \boxplus Z_6 \boxplus Z_{30}$
  - (b)  $Z_8 \boxplus Z_9 \boxplus Z_5$
  - (c)  $Z_{15} \boxplus Z_6 \boxplus (Z_2)^2$
  - (d)  $Z_6 \boxplus Z_6 \boxplus Z_{10}$
3. Welche Eigenschaft hat  $\mathbb{Q}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul?
  - (a) Er ist frei.
  - (b) Er ist endlich erzeugt.
  - (c) Er ist torsionsfrei.
  - (d) Die einzigen  $\mathbb{Z}$ -Untermodule sind 0 und  $\mathbb{Q}$ .
4. Betrachte normierte Polynome  $f, g \in K[X]$  und den durch Multiplikation mit  $X$  induzierten Endomorphismus des  $K$ -Vektorraums  $V := K[X]/(f) \oplus K[X]/(g)$ . Was ist das Minimalpolynom von  $\varphi$ ?
  - (a)  $\text{ggT}(f, g)$
  - (b)  $\text{kgV}(f, g)$
  - (c)  $f \cdot g$
  - (d)  $f + g$
5. Wir machen den  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $V := \mathbb{Q}^2$  zu einem  $\mathbb{Q}[X]$ -Modul, indem die skalare Multiplikation mit  $X$  durch Linksmultiplikation mit der Matrix  $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  gegeben ist. Welche Isomorphie von  $\mathbb{Q}[X]$ -Moduln gilt dann?
  - (a)  $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X - 2) \boxplus \mathbb{Q}[X]/(X + 2)$
  - (b)  $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2)$
  - (c)  $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X - 2)$
  - (d)  $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X) \boxplus \mathbb{Q}[X]/(X)$