Musterlösung Single Choice Aufgaben 23

separable, inseparable und normale Erweiterungen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei $M/L/K$ ein algebraischer Körperturm. Welche der Aussagen (a) bis (c) ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) M/K ist radiziell genau dann, wenn M/L und L/K radiziell sind.

   (b) M/K ist separabel genau dann, wenn M/L und L/K separabel sind.

   $\boxed{\text{(c)}}$ M/K ist normal genau dann, wenn M/L und L/K normal sind.

   (d) Alle obigen Aussagen sind korrekt.

   Erklärung: Aussagen (a) und (b) haben wir so in der Vorlesung gesehen. Ein Gegenbeispiel zu Aussage (c) ist der Körperturm $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

2. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Jede quadratische Körpererweiterung ist normal.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jeder Körpererweiterung zweier Körper mit Charakteristik 0 ist normal.

   (c) Für jedes $n > 0$ ist die Erweiterung $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ normal.

   (d) Jeder Körper hat eine normale Erweiterung.

   Erklärung: Aussage (a) kennen wir aus der Vorlesung. Auch aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbb{F}_{p^n}$ ein Zerfällungskörper über $\mathbb{F}_p$ ist, somit ist $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ normal und (c) korrekt. Die triviale Erweiterung eines Körpers ist normal, also ist (d) korrekt.

   Hingegen ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ ein Gegenbeispiel zu (b).

3. Sei $\tilde{L}$ eine normale Hülle einer algebraischen Erweiterung L/K. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) $\tilde{L}$ ist ein Zerfällungskörper über K.

   (b) $\tilde{L}$ ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.

   (c) Ist $\tilde{L}/L$ endlich, so auch L/K.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\tilde{L}/K$ ist einfach, wenn L/K endlich und separabel ist.

   Erklärung: Die Erweiterung $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ ist normal, aber nicht endlich. Somit ist $\bar{\mathbb{Q}}$ kein Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ und (a) ist falsch. Dies ist ausserdem ein Gegenbeispiel zu (c). In der Vorlesung haben wir gesehen, dass auch (b) falsch ist. Wenn L/K endlich und separabel ist, gilt dies auch für $\tilde{L}/K$. Mit dem Satz vom primitivem Element folgt dann (d).

4. Welche Körpererweiterung ist normal?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\mathbb{F}_3(T)/\mathbb{F}_3(T^3)$

   (b) $\mathbb{F}_2(T)/\mathbb{F}_2(T^3)$

   (c) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

   (d) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}$

   Erklärung: Da $X^3 - T^3 = (X - T)^3 \in \mathbb{F}_3(T)[X]$ gilt, ist $\mathbb{F}_3(T)$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - T^3$ über $\mathbb{F}_3(T^3)$. Somit ist $\mathbb{F}_3(T)/\mathbb{F}_3(T^3)$ normal.

   Das Polynom $X^3 - T^3 \in \mathbb{F}_2(T^3)[X]$ hat in $\mathbb{F}_2(T^3)$ keine Nullstelle und ist somit irreduzibel. In $\mathbb{F}_2(T)$ hat es die Nullstelle T. Eine solche Nullstelle muss ein Monom vom Grad 1 sein. Es gibt in $\mathbb{F}_2(T)$ aber nur ein solches Monom, also hat das Polynom $X^3 - T^3$ nur die Nullstelle T. Allerdings ist

   $$(X - T)^3 = X^3 + XT^2 + TX^2 - T^3 \neq X^3 - T^3,$$

   somit zerfällt das Polynom über $\mathbb{F}_2(T)[X]$ nicht in Linearfaktoren und die Erweiterung ist nicht normal. Das irreduzible Polynom $X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ hat sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ eine Nullstelle. Da es auch komplexe Nullstellen hat, zerfällt es über diesen Körpern aber nicht in Linearfaktoren.

5. Welche der Erweiterungen (a) bis (c) ist keine normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$?

   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$

   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$

   (c) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i\sqrt[2]{5})/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle obigen Erweiterung sind eine normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$.

   Erklärung: Das Minimalpolynom von $\sqrt[4]{5}$ über $\mathbb{Q}$ ist $X^4 - 5$. Nach einer Proposition der Vorlesung ist jeder $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$ enthaltende Zerfällungskörper dieses Polynoms eine normale Hülle von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})/\mathbb{Q}$. Die Nullstellen des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms $X^4 - 5$ sind $\pm\sqrt[4]{5}$ und $\pm i\sqrt[4]{5}$, somit ist $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i\sqrt[4]{5})$ ein solcher Zerfällungskörper. Aus den Rechnungen

   $$i \;=\; i\sqrt[4]{5}/\sqrt[4]{5} \;=\; i\sqrt[2]{5}/(\sqrt[4]{5})^2$$

   folgt, dass die drei Körper $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i\sqrt[2]{5})$ gleich sind. Somit ist (d) richtig.