Single Choice Aufgaben 24

Galoiserweiterungen, Galoiskorrespondenz

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussagen gelten für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$?
   (a) Wenn M/K galoissch ist, dann ist auch L/K galoissch.
   (b) Wenn M/K galoissch ist, dann auch ist auch M/L galoissch.
   (c) Wenn M/L und L/K galoissch sind, dann ist auch M/K galoissch.
   (d) Alle obigen Aussagen sind korrekt.

2. Welche Aussage ist *falsch*?
   (a) Für jeden Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ ist $L/\mathbb{Q}$ galoissch.
   (b) Jeder Körper hat eine Galoiserweiterung.
   (c) Für jede Primzahl p und jedes $n > 0$ ist die Erweiterung $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ galoissch.
   (d) Jede Galoiserweiterung hat nur endlich viele Zwischenkörper.

3. Sei L/K eine endliche Erweiterung. Welche der Aussagen (a) bis (c) ist im Allgemeinen *falsch*?
   (a) Es existieren $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ und eine Einbettung $\mathrm{Aut}_K(L) \hookrightarrow S_n$.
   (b) L/K ist galoissch genau dann, wenn $|\mathrm{Aut}_K(L)| = |L/K|$ ist.
   (c) Sei $\tilde{L}$ eine normale Hülle von L/K. Ist L/K separabel, so ist $\tilde{L}/K$ galoissch.
   (d) Alle obigen Aussagen sind korrekt.

4. Welche Körpererweiterung ist *nicht* galoissch?
   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))/\mathbb{Q}$
   (b) $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$
   (c) $\mathbb{Q}(T)/\mathbb{Q}(T^2)$
   (d) $\mathbb{F}_2(T)/\mathbb{F}_2(T^2)$

5. Sei L/K endlich galoissch mit Galoisgruppe Γ. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?
   (a) Für jeden Zwischenkörper L' existiert eine Untergruppe $\Gamma' < \Gamma$ mit $L' = L^{\Gamma'}$.
   (b) Für jede Untergruppe $\Gamma' < \Gamma$ ist $\{a \in L \mid \forall \gamma \in \Gamma' : \gamma(a) = a\}$ ein Körper.
   (c) Für jede Untergruppe $\Gamma' < \Gamma$ ist $\Gamma/\Gamma' \cong \mathrm{Gal}(K^{\Gamma'}/K)$.
   (d) Es ist $\Gamma = \mathrm{Hom}_K(L, L)$.