Musterlösung Single Choice Aufgaben 24

Galoiserweiterungen, Galoiskorrespondenz

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussagen gelten für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$?

   (a) Wenn M/K galoissch ist, dann ist auch L/K galoissch.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Wenn M/K galoissch ist, dann auch ist auch M/L galoissch.

   (c) Wenn M/L und L/K galoissch sind, dann ist auch M/K galoissch.

   (d) Alle obigen Aussagen sind korrekt.

   Erklärung: Aussage (b) haben wir so in der Vorlesung gesehen. Ein Gegenbeispiel zu Aussage (a) ist der Körperturm $\mathbb{Q}((\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$. Ein Gegenbeispiel zu Aussage (c) ist der Körperturm $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$.

2. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Für jeden Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ ist $L/\mathbb{Q}$ galoissch.

   (b) Jeder Körper hat eine Galoiserweiterung.

   (c) Für jede Primzahl p und jedes $n > 0$ ist die Erweiterung $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ galoissch.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Jede Galoiserweiterung hat nur endlich viele Zwischenkörper.

   Erklärung: Als Zerfällungskörper ist $L/\mathbb{Q}$ normal. Ausserdem ist jede Erweiterung von $\mathbb{Q}$ separabel; also ist (a) korrekt. Die triviale Erweiterung eines Körpers ist separabel und normal und somit galoissch. Also ist (b) korrekt. Aussage (c) kennen wir aus der Vorlesung. Dagegen ist $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ ist galoissch, hat aber unendlich viele Zwischenkörper; somit ist (d) falsch.

3. Sei L/K eine endliche Erweiterung. Welche der Aussagen (a) bis (c) ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Es existieren $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ und eine Einbettung $\mathrm{Aut}_K(L) \hookrightarrow S_n$.

   (b) L/K ist galoissch genau dann, wenn $|\mathrm{Aut}_K(L)| = |L/K|$ ist.

   (c) Sei $\tilde{L}$ eine normale Hülle von L/K. Ist L/K separabel, so ist $\tilde{L}/K$ galoissch.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle obigen Aussagen sind korrekt.

   Erklärung: Wegen $|\mathrm{Aut}_K(L)| \leqslant |L/K|$ ist $\mathrm{Aut}_K(L)$ eine endliche Gruppe, also folgt (a) aus dem Satz von Cayley. Aussage (b) ist Proposition 7.1.2 der Vorlesung. Ist weiter L/K separabel, so auch $\tilde{L}/K$; somit gilt (c). Daher ist (d) die richtige Antwort.

4. Welche Körpererweiterung ist *nicht* galoissch?

   (a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i))/\mathbb{Q}$

   (b) $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$

   (c) $\mathbb{Q}(T)/\mathbb{Q}(T^2)$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\mathbb{F}_2(T)/\mathbb{F}_2(T^2)$

   Erklärung: Der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ ist ein Zerfällungskörper von $(X^2 - 2)(X^2 + 1)$ über $\mathbb{Q}$ und daher normal. Als algebraischer Abschluss ist auch $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ normal, und als quadratische Erweiterung ist $\mathbb{Q}(T)/\mathbb{Q}(T^2)$ normal. In allen diesen Fällen ist ausserdem die Charakteristik Null; also ist die Erweiterung separabel und somit galoissch.

   Die Erweiterung $\mathbb{F}_2(T)/\mathbb{F}_2(T^2)$ ist ebenfalls quadratisch und daher normal. Aber hier ist die Charakteristik 2 und der Unterkörper das Bild des Oberkörpers unter dem Frobenius-Homomorphismus $f \mapsto f^2$. Somit ist diese Erweiterung rein inseparabel und daher nicht galoissch.

5. Sei L/K endlich galoissch mit Galoisgruppe Γ. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Für jeden Zwischenkörper L' existiert eine Untergruppe $\Gamma' < \Gamma$ mit $L' = L^{\Gamma'}$.

   (b) Für jede Untergruppe $\Gamma' < \Gamma$ ist $\{a \in L \mid \forall \gamma \in \Gamma' : \gamma(a) = a\}$ ein Körper.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Für jede Untergruppe $\Gamma' < \Gamma$ ist $\Gamma/\Gamma' \cong \mathrm{Gal}(K^{\Gamma'}/K)$.

   (d) Es ist $\Gamma = \mathrm{Hom}_K(L, L)$.

   Erklärung: Alle Aussagen ausser (c) sind aus der Vorlesung bekannt. Dagegen ist (c) sinnlos, wenn Γ' keine normale Untergruppe ist, da dann $\mathrm{Gal}(K^{\Gamma'}/K)$ gar nicht definiert ist. Ausserdem ist in diesem Fall sowieso $|\Gamma/\Gamma'| > |\,\mathrm{Aut}_K(K^{\Gamma'})|$.