

Single Choice Aufgaben 26

SYMMETRISCHE FUNKTIONEN, RESULTANTE, DISKRIMINANTE

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei $f \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_n]$ und schreibe $f = \sum'_{d \geq 0} f_d$ mit f_d homogen vom Grad d . Welche der Aussagen (a) bis (c) ist *nicht* äquivalent dazu, dass f symmetrisch ist?
 - (a) Für alle $d \geq 0$ ist f_d symmetrisch.
 - (b) $f(X_1^{-1}, \dots, X_n^{-1}) \in \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$ ist symmetrisch.
 - (c) Für jedes $1 < i \leq n$ ist $f(X_1, \dots, X_{i-2}, X_i, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n) = f$.
 - (d) Alle sind dazu äquivalent.
2. Seien K ein Körper und $f, g \in K[X]$. Welche der Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?
 - (a) $\text{Res}_{f,g}$ ist ein Polynom in den Koeffizienten von f und g .
 - (b) $\text{Res}_{f,g} = (-1)^{\deg(f)\deg(g)} \text{Res}_{g,f}$.
 - (c) Wenn $\text{Res}_{f,g} = 0$ ist, so haben f und g eine gemeinsame Nullstelle in K .
 - (d) Wenn f und g eine gemeinsame Nullstelle in K haben, ist $\text{Res}_{f,g} = 0$.
3. Welche Aussage gilt für alle $f, g \in \mathbb{Z}[X]$?
 - (a) $\text{Disc}_{fg} = \text{Disc}_f \cdot \text{Disc}_g$.
 - (b) $f \cdot g$ ist separabel genau dann, wenn $\text{Disc}_f \cdot \text{Disc}_g \neq 0$ ist.
 - (c) Aus $\deg(f) = \deg(g)$ und $\text{Disc}_f = \text{Disc}_g$ folgt $f = g$.
 - (d) Es ist $\text{Disc}_f \neq 0$ genau dann, wenn f über \mathbb{C} keine mehrfache Nullstelle hat.
4. Die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, für die das Polynom $X^2 + X + c$ separabel über \mathbb{C} ist, ist
 - (a) $\{4\}$
 - (b) $\{c \in \mathbb{C} \mid z \neq \frac{1}{4}\}$
 - (c) $\{c \in \mathbb{Q} \mid z \neq 4\}$
 - (d) $\{\frac{1}{4}\}$.
5. Sei L ein Zerfällungskörper eines separablen Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad n mit der Galoisgruppe S_n . Welche der Aussagen (a) bis (c) ist im Allgemeinen *falsch*?
 - (a) Die Diskriminante Disc_f ist ein Quadrat in L .
 - (b) Die Quadratwurzel aus Disc_f erzeugt eine quadratische Erweiterung von K .
 - (c) Die Diskriminante Disc_f ist ein Element von K .
 - (d) Alle obigen Aussagen sind immer richtig.