Musterlösung Single Choice Aufgaben 27

Einheitswurzeln, Abelsche Erweiterungen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei L/K endlich galoissch mit Galoisgruppe Γ, und sei $\Gamma' < \Gamma$ eine Untergruppe. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Es existiert $a \in L$ mit $L^{\Gamma'} = K(a)$.

   (b) Für jedes $a \in L$ ist $\prod_{\sigma\in\Gamma'}(X - \sigma(a)) \in L^{\Gamma'}[X]$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Es gilt $L^{\Gamma'} = K(\{\sigma(a) \mid a \in L,\ \sigma \in \Gamma'\})$.

   (d) Es gilt $L^{\Gamma'} = K(\{a \in L \mid \forall\sigma \in \Gamma' : \sigma(a) = a\})$.

   Erklärung: Aussage (a) folgt aus dem Satz vom primitiven Element. Da das Produkt in (b) über alle Elemente von Γ' läuft, sind das Polynom und folglich seine Koeffizienten invariant unter Γ' und daher (b) korrekt. Weiter ist nach Definition $L^{\Gamma'} = \{a \in L \mid \forall\sigma \in \Gamma' : \sigma(a) = a\}$; also erzeugt diese Menge auch den Körper $L^{\Gamma'}$ und (d) ist korrekt. Hingegen enthält Γ' als Untergruppe auch das Einselement, somit ist die Menge auf der rechten Seite in (c) gleich L und daher (c) falsch.

2. Die Körpererweiterung $\mathbb{F}_4(\mu_5)/\mathbb{F}_4$ hat den Grad ...

   (a) 1

   $\boxed{\text{(b)}}$ 2

   (c) 3

   (d) 6

   Erklärung: Nach Beispiel 7.6.3 der Vorlesung ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_4(\mu_5)/\mathbb{F}_4)$ isomorph zu der von der Restklasse $4 + 5\mathbb{Z}$ erzeugten Untergruppe von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$. Wegen $4 \cong -1$ mod 5 hat diese Restklasse Ordnung 2; also ist der gesuchte Grad gleich 2.

3. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) Für jeden Körper K ist $\mu_n(\overline{K}) := \{\xi \in \overline{K} \mid \xi^n = 1\}$ zyklisch der Ordnung n.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Für alle ungeraden n ist $\mathbb{F}_2(\mu_n)/\mathbb{F}_2$ eine abelsche Erweiterung.

   (c) Für alle $n \geqslant 2$ ist $\mu_n \not\subset \mathbb{Q}$.

   (d) Für jedes n ist die Gruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q})$ zyklisch.

   Erklärung: Aussage (a) gilt nur, wenn n kein Vielfaches der Charakteristik ist. Sodann ist eine der vielen Besonderheiten der Primzahl 2, dass die 2-ten Einheitswurzeln schon in $\mathbb{Q}$ liegen; somit ist (c) falsch. Weiter ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, und wenn n durch mindestens zwei Primzahlen > 2 teilbar ist, ist diese Gruppe nicht zyklisch; daher ist auch (d) falsch. Hingegen folgt (b) daraus, dass jede Erweiterung von endlichen Körpern abelsch ist, unabhängig von der Parität von n.

4. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(i)$ ist ...

   $\boxed{\text{(a)}}$ zyklisch vom Grad 4.

   (b) galoissch mit Galoisgruppe $\{\pm 1\}^2$.

   (c) nicht normal und somit nicht galoissch.

   (d) nicht separabel und somit nicht galoissch.

   Erklärung: Der Körper $\mathbb{Q}(i)$ enthält alle vierten Einheitswurzeln und das Element $(\sqrt[4]{3})^4 = 3$. Nach der Kummer-Theorie ist $\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(i)$ daher zyklisch vom Grad ein Teiler von 4. Ausserdem ist $\sqrt[4]{3}$ Nullstelle des normierten Polynoms $X^4 - 3$, welches nach dem Eisensteinkriterium für $p = 3$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist; darum ist $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}] = 4$. Wegen $i \notin \mathbb{R}$ ist weiter $[\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})] = 2$, und zusammen impliziert dies $[\mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{3})/\mathbb{Q}(i)] = 4$. Somit ist (a) und nur (a) korrekt.

5. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen korrekt?

   (a) Jede einfache Radikalerweiterung ist galoissch.

   (b) Jede endliche abelsche Galoiserweiterung ist zyklisch.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jede endliche abelsche Körpererweiterung L/K ist der Form $L_1 \dots L_m$ für zyklische Erweiterungen L_i/K.

   (d) Jede endliche Galoiserweiterung ist abelsch.

   Erklärung: Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist eine einfache Radikalerweiterung, aber nicht normal, somit ist (a) falsch. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ ist endlich galoissch mit Galoisgruppe $\{\pm 1\}^2$. Diese ist nicht zyklisch und somit ist (b) falsch. Nicht alle endlichen Galoiserweiterungen sind abelsch, so hat zum Beispiel das Polynom $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ die Galoisgruppe S_3. Hingegen ist Aussage (c) aus der Vorlesung bekannt.