Musterlösung Single Choice Aufgaben 16

Moduln über Hauptidealringen, Jordansche Normalform

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Produktzerlegungen von Ringen ist korrekt?

   (a) $\mathbb{Z}/(360) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

   (c) $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

   (d) $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

   Erklärung: Wir wenden den chinesischen Restsatz auf die Zerlegung $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5$ an und erhalten (b). In den übrigen Fällen ist die rechte Seite zwar ein endlicher Ring derselben Kardinalität 360, jedoch nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$. Denn in $R := \mathbb{Z}/360\mathbb{Z}$ ist $n \cdot 1_R = n + (360) = 0_R$ genau dann, wenn n durch 360 teilbar ist. Dagegen gilt in (a) schon $180 \cdot 1_R = 0_R$, in (c) schon $30 \cdot 1_R = 0_R$, und in (d) schon $120 \cdot 1_R = 0_R$.

2. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ betrachte den endlichen $\mathbb{Z}$-Modul $Z_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Welcher der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln ist nicht isomorph zu den anderen?

   (a) $Z_2 \boxplus Z_6 \boxplus Z_{30}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $Z_8 \boxplus Z_9 \boxplus Z_5$

   (c) $Z_{15} \boxplus Z_6 \boxplus (Z_2)^2$

   (d) $Z_6 \boxplus Z_6 \boxplus Z_{10}$

   Erklärung: Mit dem chinesischen Restsatz zerlegen wir jeden dieser Moduln nach Primpotenzen. In (a), (c) und (d) erhalten wir $(Z_2)^3 \boxplus (Z_3)^2 \boxplus Z_5$; in (b) dagegen $Z_8 \boxplus Z_9 \boxplus Z_5$. Da die Primpotenzen im Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring eindeutig bestimmt sind, ist (b) die richtige Antwort.

3. Welche Eigenschaft hat $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$-Modul?

   (a) Er ist frei.

   (b) Er ist endlich erzeugt.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Er ist torsionsfrei.

   (d) Die einzigen $\mathbb{Z}$-Untermoduln sind 0 und $\mathbb{Q}$.

   Erklärung: Für jedes Element $a \in \mathbb{Q} \smallsetminus \{0\}$ und jede Zahl $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ ist $na \neq 0$, also ist $\mathbb{Q}$ torsionsfrei und (c) ist richtig.

   Dagegen wissen wir aus Serie 6 Aufgabe 4, dass $\mathbb{Q}$ nicht endlich erzeugt ist als Ring über $\mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass $\mathbb{Q}$ auch als $\mathbb{Z}$-Modul nicht endlich erzeugt ist, also ist (b) falsch. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ ist auch nicht frei, denn je zwei Elemente sind linear abhängig, aber $\mathbb{Q}$ ist nicht von einem Element erzeugt, also ist (a) falsch. Schliesslich zeigt der $\mathbb{Z}$-Untermodul $\{0\} \neq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q}$, dass auch (d) falsch ist.

4. Betrachte normierte Polynome $f, g \in K[X]$ und den durch Multiplikation mit X induzierten Endomorphismus des K-Vektorraums $V := K[X]/(f) \oplus K[X]/(g)$. Was ist das Minimalpolynom von φ?

   (a) $\mathrm{ggT}(f, g)$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathrm{kgV}(f, g)$

   (c) $f \cdot g$

   (d) $f + g$

   Erklärung: Nach der Vorlesung ist (b) die richtige Antwort. Um die übrigen Antworten zu widerlegen, brauchen wir nur zwei normierte Polynome f, g, für welche der fragliche Wert ungleich $\mathrm{kgV}(f, g)$ ist. Für (a) tun dies beliebige teilerfremde irreduzible Polynome f, g, für (c) tut es ein beliebiges irreduzibles Polynom $f = g$. Die Antwort (d) wirkt schon von vorneherein absurd, weil Minimal- und charakteristische Polynome in unserer Erfahrung zwar oft multipliziert, aber so gut wie nie addiert werden. Konkret ist im Fall $f = g$ das Polynom $f + g = 2f$ nicht einmal normiert, kann also gar kein Minimalpolynom sein.

5. Wir machen den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V := \mathbb{Q}^2$ zu einem $\mathbb{Q}[X]$-Modul, indem die skalare Multiplikation mit X durch Linksmultiplikation mit der Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben ist. Welche Isomorphie von $\mathbb{Q}[X]$-Moduln gilt dann?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X-2) \boxplus \mathbb{Q}[X]/(X+2)$

   (b) $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2)$

   (c) $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X-2)$

   (d) $V \cong \mathbb{Q}[X]/(X) \boxplus \mathbb{Q}[X]/(X)$

   Erklärung: Das charakteristische Polynom von A ist $X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$, also ist (a) richtig.