Musterlösung Single Choice Aufgaben 17

EINFACHE GRUPPEN, SUBNORMAL- UND KOMPOSITIONSREIHEN

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist richtig?

   (a) Jedes Produkt zweier einfacher Gruppen ist einfach.

   (b) Jede nichttriviale Untergruppe einer einfachen Gruppe ist einfach.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jede nichttriviale Faktorgruppe einer einfachen Gruppe ist einfach.

   (d) Jede einfache Gruppe besitzt eine nichttriviale nicht-einfache Untergruppe.

   Erklärung: Jede einfache Gruppe hat nur sich selbst und die triviale Gruppe als Normalteiler, und folglich auch als Faktorgruppe, also stimmt die Aussage (c).

   Für zwei einfache Gruppen G_1, G_2 ist $\{1\} \times G_2$ eine nichttriviale echte normale Untergruppe von $G_1 \times G_2$, also ist die Aussage (a) falsch. Die nicht-einfache Untergruppe A_4 der einfachen Gruppe A_5 zeigt, dass Aussage (b) falsch ist. Schliesslich ist jede zyklische Gruppe von Primzahlordnung einfach und besitzt nur sich selbst als nichttriviale Untergruppe; somit ist auch (d) falsch.

2. Welche der folgenden Gruppen ist *nicht* einfach?

   (a) C_2

   $\boxed{\text{(b)}}$ A_2

   (c) S_2

   (d) Alle obigen Gruppen sind einfach.

   Erklärung: Die Gruppen C_2 und S_2 sind isomorph und einfach. Die Gruppe A_2 ist trivial und somit nicht einfach.

3. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Die Gruppe S_{42} ist von allen Konjugierten von $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$ erzeugt.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Die Gruppe S_{42} ist von allen Konjugierten von $(1\ 2)(3\ 4)$ erzeugt.

   (c) Die Gruppe S_{42} ist von allen Konjugierten von $(1\ 2\ 3\ 4)$ erzeugt.

   (d) Die Gruppe A_{42} ist von allen Konjugierten von $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ erzeugt.

   Erklärung: Die Permutation $(1\ 2)(3\ 4)$ und alle ihre Konjugierten liegen in A_{42}; darum ist (b) falsch. Dagegen sind die übrigen Aussagen richtig: In jedem Fall erzeugen die Konjugierten eine nicht-triviale normale Untergruppe. In (d) muss diese gleich A_{42} sein, da A_{42} einfach ist. Andererseits sind A_{42} und S_{42} die einzigen nicht-trivialen normalen Untergruppen von S_{42}. Da die Permutation in (a) und (c) nicht in A_{42} liegt, muss die erzeugte Untergruppe also gleich S_{42} sein.

4. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Je zwei Subnormalreihen sind äquivalent.

   (b) Je zwei Subnormalreihen besitzen eine äquivalente Verfeinerung.

   (c) Je zwei Kompositionsreihen sind äquivalent.

   (d) Je zwei Kompositionsreihen besitzen eine äquivalente Verfeinerung.

   Erklärung: In der Vorlesung wurden (b) und (c) bewiesen, und aus (c) folgt direkt (d). Dagegen ist (a) falsch, denn zum Beispiel sind $1 \lhd A_n \lhd S_n$ und $1 \lhd S_n$ nicht äquivalente Subnormalreihen für $n \geqslant 3$.

5. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

   (a) Jede endliche Gruppe besitzt eine Subnormalreihe.

   (b) Jede abelsche Gruppe besitzt eine Subnormalreihe.

   (c) Jede endliche Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Jede abelsche Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.

   Erklärung: Jede Gruppe G hat die Subnormalreihe $1 \lhd G$, also sind (a) und (b) korrekt. In der Vorlesung wurde (c) bewiesen und gezeigt, dass die Gruppe $\mathbb{Z}$ keine Kompositionsreihe besitzt, weswegen (d) falsch ist.