Musterlösung Single Choice Aufgaben 18

AUFLÖSBARE GRUPPEN, SEMIDIREKTES PRODUKT, p-GRUPPEN

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Gruppen ist *nicht* auflösbar?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$

   (b) D_{60}

   (c) Die Quaternionengruppe Q

   (d) S_4

   Erklärung: Wäre $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ auflösbar, so wäre deren Faktorgruppe $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ auch auflösbar. Aus der Vorlesung wissen wir aber, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ einfach ist, und weil sie nicht abelsch ist, ist sie auch nicht auflösbar. Somit ist (a) die gesuchte Antwort.

   Dagegen wissen wir aus der Vorlesung, dass die D_n und S_4 sowie jede p-Gruppe auflösbar ist. Insbesondere ist die Quaternionengruppe auflösbar.

2. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jedes Produkt zweier auflösbaren Gruppen ist auflösbar.

   (b) Eine endliche Gruppe ist auflösbar genau dann, wenn sie abelsch ist.

   (c) Für jede Untergruppe $N < G$ einer auflösbaren Gruppe G ist G/N auflösbar.

   (d) Alle obigen Aussagen sind richtig.

   Erklärung: Aussage (a) ist richtig: Für je zwei auflösbare Gruppen G_1 und G_2 setze $G := G_1 \times G_2$ und $N := G_1 \times 1$. Dann ist $G_1 \cong N \triangleleft G$ und $G/N \cong G_2$; und da beide auflösbar sind, ist auch G auflösbar.

   Hingegen ist die Gruppe S_3 endlich und auflösbar, aber nicht abelsch, somit ist (b) falsch. Weiter bilden die Nebenklassen G/N nur dann eine Gruppe, wenn N ein Normalteiler ist, also ist auch (c) falsch.

3. Sei $N \rtimes H$ ein semidirektes Produkt zweier Gruppen N und H. Welcher der folgenden Homomorphismen existiert im Allgemeinen *nicht*?

   (a) Ein injektiver Homomorphismus $N \hookrightarrow N \rtimes H$.

   (b) Ein injektiver Homomorphismus $H \hookrightarrow N \rtimes H$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Ein surjektiver Homomorphismus $N \rtimes H \twoheadrightarrow N$.

   (d) Ein surjektiver Homomorphismus $N \rtimes H \twoheadrightarrow H$.

   Erklärung: Wir haben natürliche Homomorphismen

$$\begin{array}{lll} N \hookrightarrow N \rtimes H, & n \mapsto (n,1) & \text{injektiv,} \\ H \hookrightarrow N \rtimes H, & h \mapsto (1,h) & \text{injektiv,} \\ N \rtimes H \twoheadrightarrow H, & (n,h) \mapsto n & \text{surjektiv.} \end{array}$$

Dagegen existiert im Allgemeinen kein surjektiver Homomorphismus $N \rtimes H \twoheadrightarrow N$. Zum Beispiel ist $S_5 = A_5 \rtimes \langle (1\ 2) \rangle$, und für jeden surjektiven Homomorphismus $S_5 \twoheadrightarrow A_5$ wäre der Kern eine normale Untergruppe der Ordnung 2 von S_5, von der wir aber bereits wissen, dass sie nicht existiert.

4. Welche der folgenden Aussagen gilt für jedes semidirekte Produkt $G = N \rtimes H$?

   (a) Wenn N und H jeweils p-Gruppen sind, so ist auch G eine p-Gruppe.

   (b) Wenn G eine p-Gruppe ist, so gilt dies auch für N und H.

   (c) Wenn N und H auflösbar sind, so ist auch G auflösbar.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle der obigen Aussagen sind richtig.

   Erklärung: Wegen $N \triangleleft G$ und $G/N \cong H$ gilt $|G| = |N| \cdot |H|$ nach Lagrange, woraus (a) und (b) folgen. Ausserdem gilt (c) nach Proposition 5.4.7 (b) der Vorlesung. Also sind alle Aussagen korrekt.

5. Das Zentrum der Diedergruppe D_{42} ist

   (a) trivial.

   $\boxed{\text{(b)}}$ zyklisch der Ordnung 2.

   (c) nicht-zyklisch der Ordnung 4.

   (d) zyklisch der Ordnung 42.

   Erklärung: Die D_{42} enthält die Untergruppe Z_{42} aller Drehungen, und das Komplement besteht aus Spiegelungen. Dabei operiert jede Spiegelung nicht-trivial auf Z_{42} und liegt daher nicht im Zentrum. Ausserdem kommutiert jede Drehung g mit jeder anderen Drehung, somit liegt sie genau dann im Zentrum, wenn sie mit jeder Spiegelung s kommutiert. Wegen $sgs^{-1} = g^{-1}$ ist dies äquivalent zu $g = g^{-1}$, also zu $g^2 = 1$. Diese Bedingung beschreibt eine Untergruppe der Ordnung 2 von Z_{42}; somit ist (b) die richtige Antwort.