Musterlösung Single Choice Aufgaben 19

p-Gruppen, Sylowsätze

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei G eine Gruppe der Ordnung p^3 für eine Primzahl p. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Es existiert ein Element der Ordnung p.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Es existiert ein Element der Ordnung p^2.

   (c) Die Gruppe G ist von 3 Elementen erzeugt.

   (d) Die Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ ist abelsch.

   Erklärung: Die Gruppe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3$ hat Ordnung p^3, besitzt aber kein Element der Ordnung p^2, also ist die Aussage (b) falsch. Hingegen kennen wir Aussage (a) aus der Vorlesung und Aussage (c) aus Aufgabe 7 von Serie 18. Schliesslich wissen wir, dass jede p-Gruppe auflösbar ist, also ist $[G, G]$ echt in G enthalten, hat also Ordnung 1 oder p oder p^2 und ist daher in jedem Fall abelsch.

2. Wieviele 2-Sylowuntergruppen hat die symmetrische Gruppe S_4?

   (a) 0

   (b) 1

   $\boxed{\text{(c)}}$ 3

   (d) 8

   Erklärung: Weil die Gruppenordnung von S_4 gleich $24 = 2^3 \cdot 3$ ist, ist die Anzahl 3-Sylowuntergruppen ein Teiler von 3 und kongruent zu 1 mod 2, also gleich 1 oder gleich 3. Gäbe es nur eine 2-Sylowuntergruppe, so wären alle Transpositionen in dieser enthalten. Weil alle Transpositionen aber die ganze Gruppe S_4 erzeugen, ist dies ein Widerspruch. Die gesuchte Anzahl ist daher 3.

3. Welche Aussage gilt für beliebige Primzahlen $p \neq q$?

   (a) Jede Gruppe der Ordnung p^2q hat eine normale p-Sylowuntergruppe.

   (b) Jede Gruppe der Ordnung p^2q hat eine normale q-Sylowuntergruppe.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jede Gruppe der Ordnung pq hat eine normale p- oder q-Sylowuntergruppe.

   (d) Jede Gruppe der Ordnung pq enthält ein Element der Ordnung pq.

   Erklärung: Aussage (c) ist richtig, denn ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p < q$; dann ist die Anzahl der q-Sylowuntergruppen ein Teiler von p und kongruent zu 1 modulo q, also gleich 1, und die einzige q-Sylowuntergruppe ist normal.

   Dagegen ist (a) falsch für die Gruppe D_6 und $p = 2$, und (b) ist falsch für die Gruppe A_4 und $q = 3$. Schliesslich ist (d) falsch für die Gruppe $S_3 \cong D_3$.

4. Sei p ein Primteiler der Gruppenordnung einer Gruppe G. Welche der folgenden Aussagen ist immer richtig?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Je zwei p-Sylowuntergruppen von G sind zueinander konjugiert.

   (b) Je zwei p-Untergruppen gleicher Ordnung von G sind zueinander konjugiert.

   (c) Je zwei Elemente in G der Ordnung p sind zueinander konjugiert.

   (d) Alle obigen Aussagen sind richtig.

   Erklärung: Die Aussage (a) ist Teil der Sylowsätze. Dagegen sind in der Diedergruppe D_4 die Rotation um den halben Vollwinkel und eine Spiegelung Elemente der Ordnung 2, sind aber nicht zueinander konjugiert; also ist (c) falsch. Für die von diesen Elementen erzeugten Untergruppen ist daher auch (b) falsch.

5. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jede Permutation der Ordnung 15 ist ein 15-Zykel.

   (b) Jede Gruppe der Ordnung 15 ist zyklisch.

   (c) Jede nichtabelsche Gruppe der Ordnung 15 ist einfach.

   (d) Jede Untergruppe vom Index 15 in S_5 ist auflösbar.

   Erklärung: Die Permutation $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ hat Ordnung 15, ist aber kein 15-Zykel, also ist Aussage (a) falsch. Sodann folgt aus den Sylowsätzen, dass jede Gruppe der Ordnung 15 eine normale 5-Sylowuntergruppe besitzt und daher ein semidirektes Produkt $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist. Weil aber jeder Homomorphismus $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$ trivial ist, ist jedes solche semidirekte Produkt schon ein direktes Produkt. Nach dem chinesischen Restsatz ist es folglich zyklisch; also ist (b) richtig. Ausserdem zeigt (b), dass es gar keine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 15 gibt, somit ist auch (c) richtig. Schliesslich hat jede Untergruppe vom Index 15 in S_5 die Ordnung $|S_5|/15 = 120/15 = 8$, ist als p-Gruppe also auflösbar.