D-MATH | Algebra II | FS 2023
Prof. Richard Pink

Musterlösung Single Choice Aufgaben 20

Sylowsätze, kleine Gruppen, Körpererweiterungen, Körperhomomorphismen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Jede Gruppe der Ordnung 21 ist ein semidirektes Produkt zweier nicht-trivialer Gruppen.

   (b) Jede Gruppe der Ordnung 21 mit nur einer 3-Sylowgruppe ist abelsch.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jede Gruppe der Ordnung 21 ist zyklisch.

   (d) Es existiert eine endliche Gruppe G mit $|\operatorname{Syl}_3(G)| = 7$.

   Erklärung: Für $|G| = 21 = 3 \cdot 7$ implizieren die Sylowsätze $|\operatorname{Syl}_7(G)| = 1$ und $|\operatorname{Syl}_3(G)| \in \{1, 7\}$. Also besitzt G eine normale 7-Sylowgruppe, und jede 3-Sylowgruppe bildet ein Komplement dazu; somit ist G ein semidirektes Produkt dieser Gruppen und (a) ist richtig. Ausserdem haben die Sylowgruppen Primzahlordnung und sind daher zyklisch. Im Fall $|\operatorname{Syl}_3(G)| = 1$ ist das semidirekte Produkt also das direkte Produkt zweier abelscher Gruppen; daher gilt (b). Sodann hat $\mathbb{F}_7^\times$ ein Element der Ordnung 3; also existiert ein nicht-trivialer Homomorphismus $Z_3 \to \mathbb{F}_7^\times$ und daher ein nicht-abelsches semidirektes Produkt der Form $G = Z_7 \rtimes Z_3$. Für dieses bleibt dann nur noch der Fall $|\operatorname{Syl}_3(G)| = 7$ übrig; also gilt (d). Ausserdem zeigt dies, dass (c) falsch ist.

2. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Jede Gruppe der Ordnung 72 ist auflösbar.

   (b) Jede einfache Gruppe hat keine nichttriviale Untergruppe vom Index 3.

   (c) Jede einfache Gruppe der Ordnung 360 hat keine Untergruppe vom Index 5.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Jede nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 60 ist isomorph zu A_5.

   Erklärung: Die Aussage (d) ist falsch, denn die nicht-abelsche Gruppe D_{30} hat ebenfalls Ordnung 60, ist als auflösbare Gruppe aber nicht isomorph zur einfachen Gruppe A_5. Dagegen sind (b) und (c) direkte Folgen von Lemma 5.8.3 und 5.8.5 der Vorlesung. Aussage (a) folgt aus dem Satz von Burnside.

3. Seien L/K und L'/K Körpererweiterungen und $\varphi\colon L \to L'$ ein Homomorphismus über K. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   (a) Sind L/K und L'/K endlich, so ist φ ein Isomorphismus.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Haben L/K und L'/K denselben endlichen Grad, so ist φ ein Isomorphismus.

   (c) Haben L/K und L'/K den gleichen Grad, so ist φ ein Isomorphismus.

   (d) Gilt $L = L'$, so ist φ ein Isomorphismus.

Erklärung: Aussage (a) kann wegen der Inklusion $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(i)$ nicht stimmen. Aussage (b) ist Proposition 6.2.4 der Vorlesung. Dagegen sind (c) und (d) falsch für den Homomorphismus $\mathbb{Q}(X) \to \mathbb{Q}(X)$, $f(X) \mapsto f(X^2)$.

4. Zwischen welchen Körpererweiterungen existiert ein Homomorphismus über $\mathbb{Q}$?

   (a) $\mathbb{Q}(i) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

   (b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

   (d) $\mathbb{Q}(i) \longrightarrow \mathbb{Q}(\pi)$

   Erklärung: Wegen $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{4})$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ enthalten; somit gilt (c). Dagegen existiert kein Homomorphismus $\mathbb{Q}(i) \to \mathbb{R}$ und daher auch keinen in den Unterkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q}(\pi) \subset \mathbb{R}$. Also sind (a) und (d) falsch. Gäbe es schliesslich einen Homomorphismus $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ über $\mathbb{Q}$, so könnten wir $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ als Körpererweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ auffassen, und wegen der Multiplikativität der Körpergrade wäre dann $[\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}] = 2$ ein Teiler von $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}] = 3$. Somit ist auch (b) falsch.

5. Seien K ein Körper und $f \in K[X] \setminus \{0\}$ irreduzibel. Welche Aussage ist richtig?

   (a) Jeder Stammkörper von f über K ist ein Zerfällungskörper von f über K.

   (b) Jeder Zerfällungskörper von f über K ist ein Stammkörper von f über K.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Wenn K algebraisch abgeschlossen ist, sind (a) und (b) richtig.

   (d) Jede algebraischen Körpererweiterung von K ist ein Zerfällungskörper eines Polynoms.

   Erklärung: Ein Gegenbeispiel zu (a) und (b) findet sich als Beispiel 6.3.7 in der Zusammenfassung der Vorlesung. Falls K algebraisch abgeschlossen ist, sind alle Nullstellen von Polynomen über K schon in K enthalten. Also ist jeder Zerfällungskörper und jeder Stammkörper über K gleich K, woraus (c) folgt. In der ersten Aufgabe der 11. Serie haben wir gesehen, dass eine algebraische Körpererweiterung existiert, die nicht endlich ist. Da nach einem Satz aus der Vorlesung alle Zerfällungskörper endliche Körpererweiterungen sind, ist diese Erweiterung ein Gegenbeispiel zu (d).