Musterlösung Single Choice Aufgaben 21

Algebraischer Abschluss, separable Polynome

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei K ein Körper. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Je zwei algebraische Abschlüsse von K sind isomorph über K.

   (b) Besitzt jedes irreduzible Polynom in $K[X]$ eine Nullstelle in K, so ist K algebraisch abgeschlossen.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Besitzt K einen algebraisch abgeschlossenen Unterkörper, so ist K algebraisch abgeschlossen.

   (d) Ist K algebraisch abgeschlossen, so ist für jedes $f \in K[X] \setminus \{0\}$ der Körper K ein Zerfällungskörper von f über K.

   Erklärung: Aussagen (a) und (b) sind aus der Vorlesung bekannt. Ausserdem wissen wir aus der Vorlesung, dass Zerfällungskörper algebraische Erweiterungen sind, woraus (d) folgt, da algebraische Erweiterungen eines algebraisch abgeschlossenen Körpers trivial sind.

   Hingegen enthält $\mathbb{C}(T)$ den algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{C}$, das Polynom $X^2 - T$ hat aber keine Nullstelle in $\mathbb{C}(T)$.

2. Zwei Elemente von $\mathbb{Z}[X]$ sind teilerfremd genau dann, wenn

   (a) sie teilerfremd in $\mathbb{C}[X]$ sind.

   $\boxed{\text{(b)}}$ die einzigen gemeinsamen Teiler der beiden 1 und -1 sind.

   (c) sie das Einsideal (1) von $\mathbb{Z}[X]$ erzeugen.

   (d) sie keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzen.

   Erklärung: Da ± 1 die einzigen Einheiten in $\mathbb{Z}[X]$ sind, ist (b) korrekt.

   Dagegen haben 2 und $2X$ den gemeinsamen Teiler $2 \notin \mathbb{Z}[X]^\times$ und sind somit nicht teilerfremd in $\mathbb{Z}[X]$. Da aber 2 eine Einheit in $\mathbb{C}[X]$ ist, sind die Elemente teilerfremd in diesem Ring, und sie haben auch keine gemeinsame Nullstelle in $\mathbb{C}$. Also sind (a) und (d) falsch.

   Das Problem bei (c) ist, dass $\mathbb{Z}[X]$ kein Hauptidealring ist. So sind 2 und X teilerfremd in $\mathbb{Z}[X]$, aber das Ideal $(2, X)$ ist nicht das Einsideal; somit ist (c) falsch.

3. Welches der folgenden Polynome ist *nicht* separabel über $\mathbb{Q}$?

   (a) $X^4 - 1$

   (b) 1

   (c) $X^3 - 3$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $X^3 - 2X^2 + X$

   Erklärung: Das Polynom $X^4 - 1$ hat die komplexen Nullstellen $1, -1, i, -i$ und ist somit separabel. Das konstante Polynom 1 hat gar keine Nullstelle und ist somit ebenfalls separabel. Wie wir zum Beispiel mit dem Eisensteinkriterium sehen ist das Polynom $X^3 - 3$ irreduzibel. Da seine formale Ableitung $3X^2$ nicht verschwindet, ist das Polynom nach einem Satz aus der Vorlesung separabel.

   Sodann gilt $X^3 - 2X^2 + X = X(X-1)^2$, also hat dieses Polynom die doppelte Nullstelle 1 und ist nicht separabel.

4. Über welchem Körper ist das Polynom $X^2 + 1$ *nicht* separabel?

   (a) $\mathbb{Q}$

   (b) $\mathbb{R}$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\mathbb{F}_2$

   (d) $\mathbb{F}_3$

   Erklärung: Aufgefasst als Element von $\mathbb{Q}[X]$ ist das obige Polynom separabel, da es die komplexen Nullstellen i und $-i$ hat. Gleiches gilt über $\mathbb{R}$.

   Aufgefasst als Element von $\mathbb{F}_2[X]$ hat das obige Polynom die Nullstelle $\bar{1}$. Die Rechnung $(X - \bar{1})(X - \bar{1}) = X^2 - \bar{2}X + \bar{1} = X^2 - \bar{1}$ zeigt, dass $\bar{1}$ eine doppelte Nullstelle ist; somit ist das Polynom nicht separabel.

   Aufgefasst als Element von $\mathbb{F}_3$ hat das obige Polynom keine Nullstelle und ist somit irreduzibel, da es Grad 2 hat. Da seine formale Ableitung nicht verschwindet, ist das Polynom separabel über $\mathbb{F}_3$.

5. Welche Aussage ist richtig über jedem Körper?

   (a) Jedes irreduzible Polynom ist separabel.

   (b) Jedes separable Polynom ist irreduzibel.

   (c) Jedes separable Polynom hat formale Ableitung ungleich Null.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle obigen Aussagen sind im Allgemeinen falsch.

   Erklärung: Wie wir in Beispiel 6.5.10 der Vorlesung gesehen haben, ist das Polynom $X^2 - Y \in \mathbb{F}_2(Y)[X]$ irreduzibel, aber nicht separabel; somit ist (a) falsch. Sodann ist das Polynom $X(X-1) \in \mathbb{Q}[X]$ separabel, aber nicht irreduzibel, also ist (b) falsch. Schliesslich ist das konstante Polynom $1 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel, seine formale Ableitung ist aber gleich Null; somit ist (c) ebenfalls falsch.