Musterlösung Single Choice Aufgaben 22

Perfekte Körper, endliche Körper

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist *falsch*?

   (a) Jedes irreduzible Polynom über einem perfekten Körper ist separabel.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jedes separable Polynom über einem perfekten Körper ist irreduzibel.

   (c) Jeder algebraisch abgeschlossene Körper ist perfekt.

   (d) Jeder Körper der Charakteristik 0 ist perfekt.

   Erklärung: Aussagen (a) und (d) kennen wir aus der Vorlesung. Die irreduziblen Polynome über einem algebraisch abgeschlossenen Körper haben Grad 1 und sind somit separabel, also ist auch (c) richtig. Dagegen ist das Polynom $X(X-1) \in \mathbb{C}[X]$ reduzibel, hat aber keine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$ und ist somit separabel. Also ist Aussage (b) falsch.

2. Welcher Körper ist *nicht* perfekt?

   (a) $\overline{\mathbb{F}_7}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbb{F}_{41}((t))$

   (c) $\mathbb{F}_{81}$

   (d) $\mathbb{R}(t)$

   Erklärung: Alle algebraischen Erweiterungen von $\overline{\mathbb{F}}_7$ sind trivial und somit separabel; also ist $\overline{\mathbb{F}}_7$ perfekt. Das Bild von $\mathrm{Frob}_{41} \colon \mathbb{F}_{41}((t)) \to \mathbb{F}_{41}((t))$ enthält das Element t nicht, also ist $\mathbb{F}_{41}((t))$ nicht perfekt. Als endlicher Körper ist $\mathbb{F}_{81}$ perfekt. Schliesslich ist $\mathbb{R}(t)$ als Körper der Charakteristik 0 ebenfalls perfekt.

3. Welches Element ist ein Erzeugendes von $\mathbb{F}_{17}^\times$?

   (a) $\overline{1}$

   (b) $\overline{2}$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\overline{3}$

   (d) $\overline{8}$

   Erklärung: Die Gruppe $\mathbb{F}_{17}^\times$ ist zyklisch der Ordnung 16. Ihr Einselement $\overline{1}$ ist also kein Erzeugendes. Weiter gilt $\overline{2}^4 = \overline{16} = -\overline{1}$ und deshalb auch $\overline{8}^4 = (\overline{2}^3)^4 = (\overline{2}^4)^3 = (-\overline{1})^3 = -\overline{1}$. Insbesondere gilt $\overline{2}^8 = \overline{8}^8 = (-\overline{1})^2 = \overline{1}$, und deshalb sind $\overline{2}$ und $\overline{8}$ keine Erzeugenden. Schliesslich gilt $\overline{3}^8 = \overline{9}^4 = (-\overline{8})^4 = \overline{8}^4 = -\overline{1} \neq \overline{1}$. Somit hat $\overline{3}$ die Ordnung 16 und ist deshalb ein Erzeugendes.

4. Wie viele irreduzible Faktoren hat das Polynom $X^8 - X$ über $\mathbb{F}_2$?

   (a) 1

   (b) 3

   $\boxed{\text{(c)}}$ 4

   (d) 5

   Erklärung: Da $X^8 - X$ separabel über $\mathbb{F}_2$ ist, hat es keine mehrfachen irreduziblen Faktoren. Die irreduziblen Faktoren vom Grad 1 entsprechen den Nullstellen in $\mathbb{F}_2$, also den zwei Elementen 0 und 1. Jeder andere irreduzible Faktor $P(X)$ hat dann Grad > 1. Nun wissen wir aus der Vorlesung, dass der Zerfällungskörper von $X^8 - X$ den Grad 3 über $\mathbb{F}_2$ hat. Da dieser Zerfällungskörper einen Stammkörper k von $P(X)$ enthält, muss dessen Grad ein Teiler von 3 sein. Weil 3 prim ist, muss dann $\deg(P) = [k/\mathbb{F}_2] = 3$ sein. Wegen $8 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3$ hat $X^8 - X$ also insgesamt je 2 irreduzible Faktoren vom Grad 1 bzw. 3, und (c) ist die richtige Antwort.

5. Sei p eine Primzahl. Welche der Aussagen (a) bis (c) ist im Allgemeinen *falsch*?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Die Einheitengruppe $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ ist zyklisch.

   (b) Es existiert ein Körper der Ordnung p^p.

   (c) Jeder endliche Körper der Charakteristik p ist isomorph zu $\mathbb{F}_{p^n}$ für ein $n \geqslant 1$.

   (d) Alle obigen Aussagen sind korrekt.

   Erklärung: Jedes Element von $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$ liegt in einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{F}_p$, also in einem endlichen Körper. Deshalb erzeugt es eine endliche Untergruppe von $\overline{\mathbb{F}}_p^\times$. Da $\overline{\mathbb{F}}_p$ aber nicht selbst endlich ist, kann kein einzelnes Element seine Einheitengruppe erzeugen; somit ist (a) falsch. Dagegen wurden Aussagen (b), sogar für beliebiges p^n anstatt p^p, sowie (c) in der Vorlesung bewiesen.