Musterlösung Single Choice Aufgaben 25

Galois- und transzendente Erweiterungen, Symmetrische Funktionen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage über die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)/\mathbb{Q}$ ist korrekt?

   (a) Die Erweiterung ist galoissch mit Galoisgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

   (b) Die Erweiterung ist galoissch mit Galoisgruppe isomorph zu S_4.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Erweiterung ist galoissch mit Galoisgruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

   (d) Die Erweiterung ist nicht galoissch.

   Erklärung: Die Erweiterung ist ein Zerfällungskörper von $(X^2 - 5)(X^2 + 1)$ und somit galoissch. Ihre Galoisgruppe operiert treu auf den Nullstellen, wobei jeweils $\pm\sqrt{5}$ und $\pm i$ eine Bahn bilden. Diese Gruppe ist somit isomorph zu einer Untergruppe von $\langle(1\ 2), (3\ 4)\rangle < S_4$. Daher hat nur (c) eine Chance, korrekt zu sein. Tatsächlich ist $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ und $i \notin \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ und daher $[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)/\mathbb{Q}] = 4$. Daher hat die Galoisgruppe die Ordnung 4 und deshalb isomorph zu $\langle(1\,2), (3\,4)\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Jede transzendente Körpererweiterung hat unendlichen Grad.

   (b) Jede Körpererweiterung von unendlichem Grad ist transzendent.

   (c) Jede Transzendenzbasis einer Körpererweiterung erzeugt diese auch.

   (d) Für jede Körpererweiterung existiert eine algebraisch unabhängige Teilmenge, welche die Erweiterung erzeugt.

   Erklärung: Aussage (a) kennen wir aus der Vorlesung. Dagegen ist $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ ist unendlich und algebraisch, also ist (b) falsch. Weiter hat jede echte algebraische Körpererweiterung die leere Menge als Transzendenzbasis, die aber die Erweiterung nicht erzeugt; somit sind auch (c) und (d) falsch.

3. Welche der folgenden Körpererweiterungen ist transzendent?

   (a) $\mathbb{C}/\mathbb{R}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\mathbb{R}/\mathbb{Q}(\pi)$

   (c) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})/\mathbb{Q}$

   (d) $\mathbb{Q}(X)/\mathbb{Q}(X^2)$

   Erklärung: Die Körpererweiterungen in (a), (c) und (d) sind endlich vom Grad 2, 4 bzw. 2. Somit sind diese Erweiterungen algebraisch und nicht transzendent. Hingegen ist $\mathbb{R}/\mathbb{Q}(\pi)$ transzendent, weil die Erweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ unendlichen Transzendenzgrad hat, dagegen $\mathbb{Q}(\pi)/\mathbb{Q}$ aber nur Transzendenzgrad 1.

4. Betrachte eine Körpererweiterung L/K und eine Teilmenge $A = \{a_\nu \mid \nu \in N\} \subset L$. Welche Aussage ist im Allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) Für jedes $x \in K^\times$ ist $xA := \{xa_\nu \mid \nu \in N\}$ algebraisch unabhängig.

   (b) A ist algebraisch unabhängig.

   $\boxed{\text{(c)}}$ A ist eine K-linear unabhängige Teilmenge des K-Vektorraums L.

   (d) Jede Teilmenge von A ist algebraisch unabhängig.

   Erklärung: Die Äquivalenz (b)$\Leftrightarrow$(d) folgt direkt aus der Definition von algebraischer Unabhängigkeit. Ist xA algebraisch abhängig für ein $x \in K^\times$, so gibt es ein von Null verschiedenes Polynom $f \in K[(X_\nu)_\nu]$ mit $f((xa_\nu)_\nu) = 0$. Dann ist aber $g := f((xX_\nu)_\nu)$ ein von Null verschiedenes Polynom in $K[(X_\nu)_\nu]$ mit $g((a_\nu)_\nu) = 0$; somit ist A algebraisch abhängig. Aus diesem Grund gilt (a)$\Leftrightarrow$(b). Schliesslich gilt (b)$\Rightarrow$(c), aber nicht die Umkehrung. Zum Beispiel sind $\pi, \pi^2 \in \mathbb{R}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$, da $\pi \notin \mathbb{Q}$ ist. Wegen $f(\pi, \pi^2) = 0$ für das Polynom $f(X, Y) = X^2 - Y$ sind sie aber algebraisch abhängig über $\mathbb{Q}$.

5. Welches der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ ist symmetrisch und homogen vom Grad 3?

   $\boxed{\text{(a)}}$ $f_1 := X_1^3 + X_2^3 + X_3^3$

   (b) $f_2 := X_1^3 + X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_2^3$

   (c) $f_3 := (X_1 - X_2)^3 + (X_2 - X_3)^3 + (X_3 - X_1)^3$

   (d) $f_4 := \sum_{i=1}^3 X_i^2$

   Erklärung: Wir haben in der Vorlesung gesehen, dass $f_1 = \sum_{i=1}^3 X_i^3$ symmetrisch ist, ausserdem ist es homogen vom Grad 3. Dagegen enthält f_2 die Variable X_1, aber nicht die Variable X_3, und kann somit nicht symmetrisch sein. Weiter gilt $f_3(X_2, X_1, X_3) = -f_3 \neq f_3$; also ist auch f_3 nicht symmetrisch. Schliesslich ist f_4 homogen vom Grad 2. Also ist (a) die einzige richtige Antwort.