Musterlösung Single Choice Aufgaben 26

Symmetrische Funktionen, Resultante, Diskriminante

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Sei $f \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ und schreibe $f = \sum'_{d \geqslant 0} f_d$ mit f_d homogen vom Grad d. Welche der Aussagen (a) bis (c) ist *nicht* äquivalent dazu, dass f symmetrisch ist?

   (a) Für alle $d \geqslant 0$ ist f_d symmetrisch.

   (b) $f(X_1^{-1}, \ldots, X_n^{-1}) \in \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_n)$ ist symmetrisch.

   (c) Für jedes $1 < i \leqslant n$ ist $f(X_1, \ldots, X_{i-2}, X_i, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n) = f$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle sind dazu äquivalent.

   Erklärung: Für (a) und (b) folgt dies aus einer direkten Rechnung, und für (c) folgt es daraus, dass die Transpositionen $(i-1\ i)$ für alle $1 < i \leqslant n$ die Gruppe S_n erzeugen.

2. Seien K ein Körper und $f, g \in K[X]$. Welche der Aussagen ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) $\mathrm{Res}_{f,g}$ ist ein Polynom in den Koeffizienten von f und g.

   (b) $\mathrm{Res}_{f,g} = (-1)^{\deg(f)\deg(g)} \mathrm{Res}_{g,f}$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Wenn $\mathrm{Res}_{f,g} = 0$ ist, so haben f und g eine gemeinsame Nullstelle in K.

   (d) Wenn f und g eine gemeinsame Nullstelle in K haben, ist $\mathrm{Res}_{f,g} = 0$.

   Erklärung: Aus der Vorlesung kennen wir Aussagen (a), (b) und (d), sowie dass $\mathrm{Res}_{f,g} = 0$ äquivalent dazu ist, dass f und g nicht teilerfremd sind. Ist K algebraisch abgeschlossen, so folgt daraus (c), im Allgemeinen aber nicht.

3. Welche Aussage gilt für alle $f, g \in \mathbb{Z}[X]$?

   (a) $\mathrm{Disc}_{fg} = \mathrm{Disc}_f \cdot \mathrm{Disc}_g$.

   (b) $f \cdot g$ ist separabel genau dann, wenn $\mathrm{Disc}_f \cdot \mathrm{Disc}\, g \neq 0$ ist.

   (c) Aus $\deg(f) = \deg(g)$ und $\mathrm{Disc}_f = \mathrm{Disc}_g$ folgt $f = g$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Es ist $\mathrm{Disc}_f \neq 0$ genau dann, wenn f über $\mathbb{C}$ keine mehrfache Nullstelle hat.

   Erklärung: Für $f = g = X + 1$ gilt $\mathrm{Disc}_f = \mathrm{Disc}_g = 1$ und $\mathrm{Disc}_{fg} = 0$, also sind (a) und (b) falsch. Sodann bilden $f = X + 1$ und $g = X$ ein Gegenbeispiel zu (c). Dagegen ist (d) eine direkte Folge von Proposition 7.4.7.

4. Die Menge aller $c \in \mathbb{C}$, für die das Polynom $X^2 + X + c$ separabel über $\mathbb{C}$ ist, ist

   (a) $\{4\}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\{c \in \mathbb{C} \mid z \neq \frac{1}{4}\}$

   (c) $\{c \in \mathbb{Q} \mid z \neq 4\}$

   (d) $\{\frac{1}{4}\}$.

   Erklärung: Für $f := X^2 + X + c$ gilt $\mathrm{Disc}_f = 1 - 4c$ und nach einer Proposition der Vorlesung ist f separabel genau dann, wenn $\mathrm{Disc}_f \neq 0$ ist. Also ist Antwort (b) richtig.

5. Sei L ein Zerfällungskörper eines separablen Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad n mit der Galoisgruppe S_n. Welche der Aussagen (a) bis (c) ist im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Die Diskriminante Disc_f ist ein Quadrat in L.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Die Quadratwurzel aus Disc_f erzeugt eine quadratische Erweiterung von K.

   (c) Die Diskriminante Disc_f ist ein Element von K.

   (d) Alle obigen Aussagen sind immer richtig.

   Erklärung: Aussage (c) gilt nach Konstruktion. Sodann schreiben wir $f(X) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ mit $\alpha_i \in L$; wegen $\mathrm{Disc}_f = a_n^{2n-2} \cdot \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ gilt dann (a). Weiter gilt (b) nach Beispiel 7.5.1 der Vorlesung, falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ist. Wie dort besprochen ist die Quadratwurzel aus Disc_f im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ aber schon ein symmetrisches Polynom in den Nullstellen und daher ein Element von K. Somit ist (b) im Allgemeinen falsch.