Wiederholungsserie

1. Gibt es einen Integritätsbereich mit 15 Elementen?

2. Sei K ein Körper. Berechne die Elementarteiler des $K[X]$-Moduls

$$M := K[X]/((X+1)^2) \oplus K[X]/\big((X-1)(X^2+1)\big) \oplus K[X]/\big((X+1)(X^2-1)\big).$$

3. Eine Untergruppe $H < G$, welche unter allen Automorphismen von G in sich übergeht, heisst eine *charakteristische Untergruppe von G*. (Vergleiche Aufgabe 1 von Serie 17.)

   (a) Zeige, dass jede charakteristische Untergruppe normal ist.

   (b) Zeige, dass das Zentrum jeder Gruppe eine charakteristische Untergruppe ist.

   (c) Bestimme für jedes n die charakteristischen Untergruppen von S_n.

4. Bestimme für jede Primzahl p die Ordnung der Automorphismengruppe der Gruppe $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \boxplus (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

5. Betrachte Gruppen G und H. Beweise oder widerlege:

   (a) Besitzt sowohl G als auch H eine Kompositionsreihe, so auch $G \times H$.

   (b) Besitzt G eine Kompositionsreihe, so auch jede Faktorgruppe von G.

   (c) Besitzt G eine Kompositionsreihe, so auch jede Untergruppe von G.

6. Eine Gruppe G mit der Eigenschaft $[G,G] = G$ heisst *perfekt*. Zeige für alle $N \lhd G$:

   (a) Ist G perfekt, so auch G/N.

   (b) Sind N und G/N perfekt, so auch G.

   (c) Jede endliche Gruppe ist in einer perfekten Gruppe enthalten.

7. Beweise oder widerlege:

   (a) Jede Gruppe der Ordnung 35 ist abelsch.

   (b) Jede Gruppe der Ordnung 55 ist abelsch.

   (c) Es existiert eine einfache Gruppe der Ordnung 1365.

8. Sei G eine Gruppe und P eine p-Sylowuntergruppe von G. Zeige für beliebige Untergruppen H von G:

$$\mathrm{Norm}_G(P) < H \implies H = \mathrm{Norm}_G(H).$$

9. Sei G eine nilpotente endliche Gruppe. Zeige:

   (a) Jede echte Untergruppe $H \lneqq G$ ist echt in ihrem Normalisator $\mathrm{Norm}_G(H)$ enthalten.

   (b) Jede Sylowuntergruppe von G ist normal in G.

   (c) Die Gruppe G ist das innere direkte Produkt ihrer Sylowuntergruppen.

10. Sei $n \geqslant 3$ ungerade. Finde alle Isomorphieklassen von Gruppen G mit den Eigenschaften

    (a) $|G| = 2n$ und

    (b) G enthält eine zyklische Untergruppe H der Ordnung n.

    Hinweis: Zeige, dass G ein semidirektes Produkt von H mit einer Untergruppe C der Ordnung 2 ist. Beschreibe die möglichen Homomorphismen $C \to \mathrm{Aut}(H)$ und zeige, dass die entsprechenden semidirekten Produkte nicht isomorph sind.

11. Sei p eine Primzahl. Gibt es eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung p^4 ...

    (a) mit einem Element der Ordnung p^4?

    (b) mit einem Element der Ordnung p^3, aber ohne ein Element der Ordnung p^4?

    (c) mit einem Element der Ordnung p^2, aber ohne ein Element der Ordnung p^3?

    (d) ohne ein Element der Ordnung p^2?

12. Gibt es eine nicht-abelsche endliche Gruppe der Ordnung 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, beziehungsweise 95?

13. Der *Satz von Wilson* besagt, dass für jede Primzahl p gilt $(p-1)! \equiv -1 \bmod (p)$. Beweise dies vermittels einer Rechnung in $\mathbb{F}_p^\times$.

14. Zeige: Für jede Primpotenz $p^n \geqslant 3$ ist

$$(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times \;\cong\; \begin{cases} Z_{p-1} \times Z_{p^{n-1}} & \text{im Fall } p > 2, \\ Z_p \times Z_{p^{n-2}} & \text{im Fall } p = 2 \text{ und } n \geqslant 2. \end{cases}$$

15. Zeige: Für endliche Körper k und ℓ existiert ein Homomorphismus $k \to \ell$ genau dann, wenn $|\ell|$ eine Potenz von $|k|$ ist.

16. Zeige: Jede Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ vom Transzendenzgrad $\leqslant |\mathbb{R}|$ ist isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$.

17. Finde alle Körperhomomorphismen $K := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, e^{\frac{\pi i}{4}}) \to \mathbb{C}$. Ist $K/\mathbb{Q}$ normal?

18. Wann ist eine Körpererweiterung vom Grad 2 inseparabel?

19. Sei H die Gruppe aller Automorphismen von $\mathbb{C}(X)$ der Form $f(X) \mapsto f(X+a)$ für alle $a \in \mathbb{C}$. Bestimme den Fixkörper $\mathbb{C}(X)^H$.

20. Finde ein primitives Element eines Zerfällungskörpers des Polynoms X^3-7 über $\mathbb{Q}$.

21. Beschreibe, wie man ein primitives Element eines Zerfällungskörpers eines beliebigen Polynoms f vom Grad 3 über K findet.

22. Zeige: Eine algebraische Körpererweiterung L/K ist dann und nur dann galoissch, wenn der Fixkörper von L unter der Gruppe $\mathrm{Aut}_K(L)$ gleich K ist.

23. Zeige: Sind L/K und L'/K endliche Galoiserweiterungen von teilerfremdem Grad, so ist LL'/K endlich galoissch mit einem natürlichen Isomorphismus
$$\mathrm{Gal}(LL'/K) \;\cong\; \mathrm{Gal}(L/K) \times \mathrm{Gal}(L'/K).$$

24. Zeige oder widerlege: Es existiert eine Körpererweiterung mit genau $50'000$ echten Zwischenkörpern.

25. Bestimme die Galoisgruppen der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$:
    (a) $X^3 - 2X + 1$,
    (b) $X^3 + X + 1$,
    (c) $X^3 - 6X + 1$,
    (d) $X^3 - 12X + 8$.

26. Sei L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^6 - 5$ über $\mathbb{Q}$. Bestimme alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$ mitsamt Inklusionen sowie, falls sie galoissch über $\mathbb{Q}$ sind, deren Galoisgruppen über $\mathbb{Q}$.

27. Finde für jede Primzahl p ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad p mit der Galoisgruppe S_p.

28. Beweise oder widerlege: Für jede endliche Gruppe G existiert ein Körper K und eine Galoiserweiterung L/K mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$.

29. Sei R ein Ring, und seien $f, g \in R[X]$ normierte Polynome. Zeige:
$$\mathrm{Disc}_{fg} = \mathrm{Disc}_f \cdot \mathrm{Disc}_g \cdot \mathrm{Res}_{f,g}^2\,.$$

30. Zeige: Für beliebige positive ganze Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ gilt
$$L := \mathbb{Q}\big(\sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_n}\big) \;=\; \mathbb{Q}\big(\sqrt{q_1} + \ldots + \sqrt{q_n}\big).$$

31. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom, das in $\mathbb{C}$ sowohl reelle als auch nicht-reelle Nullstellen hat. Zeige, dass die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ nicht abelsch ist.

32. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive n-te Einheitswurzel. Für welche ganzen Zahlen k ist $\zeta + \zeta^k$ ein primitives Element der Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$?

33. Beweise oder widerlege: Für jede ganze Zahl $n \geqslant 1$ existiert eine zyklische Erweiterung $K/\mathbb{Q}$ vom Grad n.

34. Betrachte eine Körpererweiterung der Form $K(a)/K$ mit $a^n \in K$ für ein $n \geqslant 1$. Beweise oder widerlege: Alle Zwischenkörper haben die Form $K(a^m)$ für natürliche Zahlen $m \geqslant 1$.

35. Sei $L = K(a_1, \ldots, a_r)/K$ eine Erweiterung von Körpern der Charakteristik $\neq 2$ mit der Eigenschaft $b_i := a_i^2 \in K^\times$ für alle i. Sei $(K^\times)^2 := \{x^2 \mid x \in K^\times\}$ und betrachte die von den Restklassen aller b_i erzeugte Untergruppe $B \subset K^\times/(K^\times)^2$. Zeige:

    (a) L/K ist galoissch.

    (b) Es gibt eine wohldefinierte Abbildung

    $$\varphi\colon \quad \mathrm{Gal}(L/K) \times B \longrightarrow \mu_2 = \{\pm 1\}, \quad (\gamma, [b]) \mapsto \varphi(\gamma, [b])$$

    mit der Eigenschaft $\varphi(\gamma, [b]) := \gamma(a)/a$ für alle $a \in L^\times$ mit $[b] = [a^2]$.

    (c) Die Abbildung φ ist linear in der ersten Variablen.

    (d) Die Abbildung φ ist linear in der zweiten Variablen.

    (e) Für jedes $\gamma \in \mathrm{Gal}(L/K) \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ existiert ein $[b] \in B$ mit $\varphi(\gamma, [b]) \neq 1$. (Man nennt ein solches φ *links nicht-ausgeartet.*)

    (f) Für jedes $[b] \in B \smallsetminus \{[1]\}$ existiert ein $\gamma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\varphi(\gamma, [b]) \neq 1$. (Man nennt ein solches φ *rechts nicht-ausgeartet.*)

    (g) Es existiert ein natürlicher Isomorphismus $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Hom}(B, \mu_2)$.

36. Bestimme die Galoisgruppe des Polynoms $X^4 + 18X^2 - 72X + 81$ über $\mathbb{Q}$.

Sternaufgaben folgen auf einem separaten Blatt.