4.10 Moduln über Hauptidealringen

Sei R ein Hauptidealring.

Erinnerung: Ein R-Modul M ist von n Elementen erzeugt g.d.w. ein surjektiver Homom. $R^n \to M$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum x_i m_i$ existiert.

$M \subset R^n$

4.10.1 Proposition: Jeder Untermodul von R^n ist von n Elementen erzeugt.

Beweis: $n = 0 \Rightarrow M = 0$ von 0 Elementen erzeugt

$n-1 \rightsquigarrow n$: Homomorphismen:

$$R^{n-1} \xhookrightarrow{i} R^n \xrightarrow{p} R \qquad \mathrm{Bild}(i) = \mathrm{Kern}(p).$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (x_i)_i \longmapsto x_n$$

$p(M) \subset R$ Untermodul ist von 1 Element erzeugt. Wähle $m_n \in M$ so dass $p(M) = R \cdot p(m_n)$.

$i^{-1}(M) \subset R^{n-1}$ " , Ind.Vor. $\Rightarrow$ von $n-1$ Elementen, sagen wir von $m'_1, \ldots, m'_{n-1}$ erzeugt.

$i^{-1}(M) \xrightarrow{\sim} M \cap i(R^{n-1}) =$ von $i(m'_1), \ldots, i(m'_{n-1})$ erzeugt.

Beh.: M ist von $i(m'_1), \ldots, i(m'_{n-1}), m_n$ erzeugt.

Bew.: Sei $m \in M$ beliebig $\Rightarrow p(m) \in p(M)$. Schreibe $p(m) = x_n \cdot p(m_n)$ mit $x_n \in R$.

$$\Rightarrow p(\underbrace{m - x_n m_n}_{\in M}) = p(m) - x_n \cdot p(m_n) = 0 \Rightarrow m - x_n m_n = i(m') \text{ für ein } m' \in i^{-1}(M).$$

Schreibe $m' = x_1 m'_1 + \ldots + x_{n-1} m'_{n-1}$ mit $x_i \in R$

$$\Rightarrow m = i(m') + x_n m_n = x_1 \, i(m'_1) + \ldots + x_{n-1} \, i(m'_{n-1}) + x_n m_n.$$

qed. (Beh.)

qed.

4.10.2 Satz: Für jeden endlich erzeugten R-Modul M existieren Zahlen $r, k \geqslant 0$ und Elemente $e_1, \ldots, e_k \in R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$ mit $e_1 | e_2 | \ldots | e_k$, so dass gilt

$$\boxed{M \cong R^r \boxplus \boxplus_{i=1}^{k} R/(e_i).}$$

Beweis: Wähle $f : R^n \twoheadrightarrow M$, $(x_i)_i \mapsto \sum x_i m_i$.

Homomorphiesatz: $R^n/\ker(f) \xrightarrow{\sim} M$.

4.10.1 $\Rightarrow$ $\ker(f)$ von n Elementen erzeugt.

Wähle $g : R^n \twoheadrightarrow \ker(f) = \mathrm{Bild}(L_A)$.

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "L_A"'] & \ker(f) \arrow[d, phantom, "\cap"] \\ & R^n \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ A $n \times n$-Matrix.

§4.8 $\Rightarrow$ $\exists\, U, V \in GL_n(R)$: $UAV = D = \begin{pmatrix} e_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & e_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$

mit $e_1, \ldots, e_k \in R \setminus \{0\}$; $e_1 | e_2 | \ldots | e_k$.

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\ R^n \arrow[r, "L_A"] & R^n \arrow[r, two heads, "{[id]}"] \arrow[d, "L_U", "\wr"'] & R^n/\mathrm{Bild}(L_A) \arrow[d, "{[L_U]}", "S"'] \\ R^n \arrow[u, "L_V", "\wr"'] \arrow[r, "L_D"'] & R^n \arrow[r, two heads, "{[id]}"] & R^n/\mathrm{Bild}(L_D) \end{tikzcd}$$

Beh.: L_U induziert einen Isomorphismus

$\underline{x} + \mathrm{Bild}(L_A) \longmapsto U\underline{x} + \mathrm{Bild}(L_D)$.

Bew.: Wohldef.: $\underline{x} \in \mathrm{Bild}(L_A) \Leftrightarrow \underline{x} = A\underline{y}$ für ein $\underline{y} \in R^n$

$\Rightarrow U\underline{x} = UA\underline{y} = DV^{-1}\underline{y} \in \mathrm{Bild}(L_D)$.

Injektiv: $U\underline{x} \in \mathrm{Bild}(L_D) \Leftrightarrow U\underline{x} = D\underline{y}$ für ein $\underline{y} \in R^n$

$\Rightarrow U\underline{x} = UAV\underline{y} \Rightarrow \underline{x} = AV\underline{y} \in \mathrm{Bild}(L_A)$.

Surjektiv: ...

qed (Beh.)

$$\mathrm{Bild}(L_D) = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 x_1 \\ \vdots \\ e_k x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \ldots, x_k \in R \right\} \subset R^n = \boxplus_{i=1}^{n} R.$$

$$\| \quad \boxplus_{i=1}^{n} \begin{cases} e_i R & \text{falls } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow R^n/\mathrm{Bild}(L_D) \cong \boxplus_{i=1}^{n} R \Big/ \begin{cases} e_i R & i \leq k \\ 0 & i > k \end{cases} = \boxplus_{i=1}^{k} R/(e_i) \boxplus \boxplus_{i=k+1}^{n} R \cong R^{n-k} \boxplus \boxplus_{i=1}^{k} R/(e_i).$$

$= 0$ falls $e_i \in R^\times$.

$$\cong R^{n-k} \boxplus \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq k \\ e_i \notin R^\times}} R/(e_i)$$

qed