4.8 Elementarteilersatz

Sei R ein Hauptidealring.

Erinnerung: Eine $n \times n$- Matrix A mit Koeffizienten in R ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A)$ in $R^\times$ liegt. Die Menge aller dieser Matrizen bildet eine Gruppe mit der Matrixmultiplikation, genannt die *allgemeine lineare Gruppe* $\mathrm{GL}_n(R)$.

4.8.1 Satz: Sei A eine $m \times n$-Matrix über einem Hauptidealring R. Dann existieren Matrizen $U \in \mathrm{GL}_m(R)$ und $V \in \mathrm{GL}_n(R)$ sowie eine Zahl $0 \leqslant k \leqslant \min\{m, n\}$ und Elemente $e_1, \ldots, e_k \in R \setminus \{0\}$ mit $e_1 | e_2 | \ldots | e_k$, so dass gilt

$$UAV = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & e_k & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right),$$

wobei alle nicht gezeigten Matrixkoeffizienten gleich 0 sind.

Erinnerung: $\forall x, y \in R \ \exists u, v \in R: \ \mathrm{ggT}(x, y) \sim ux + vy$.

Beweis: Schreibe $A = (a_{ij})_{i,j}$. Klar wenn $m=0$ oder $n=0$. Induktion:

Lemma 1: Falls $\exists\, i,j : a_{11} \nmid a_{ij}$, dann $\exists\, U, V$ invertierbar sodass
$$UAV = (b_{ij})_{ij} \quad \text{mit} \quad b_{11} \mid a_{11} \nmid b_{11}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Bew.: Setze $d := \mathrm{ggT}(a_{11}, a_{ij}) \Rightarrow \underline{d \mid a_{11} \nmid d}$.

Fall (i) $i=1$. Dann ist $j>1$. Ersetze A durch
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{matrix}} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$
$\Rightarrow$ oBdA $j=2$.

Setze $x := \dfrac{a_{11}}{d}$ und $y = \dfrac{a_{12}}{d} \Rightarrow \mathrm{ggT}(x,y) \sim 1$. Wähle $u, v \in R$ mit $xu + yv = 1$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \underbrace{\left(\begin{array}{cc|ccc} u & -y & & 0 & \\ v & x & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right)}_{} = \left(\begin{array}{c|c} a_{11}u + a_{12}v & \cdots \\ \hline \vdots & \ddots \end{array}\right) = \begin{pmatrix} d & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$a_{11}u + a_{12}v = dxu + dyv = d$$

$\det = (ux + yv) \cdot 1 \cdots 1 = 1$.

$\Rightarrow$ invertierbar!

Fall (ii) $j=1$: Tue dasselbe von links.

Fall (iii) $\forall i > 1: a_{11} \mid a_{i1}$ | aber $\exists i,j > 1: a_{11} \nmid a_{ij}$.
$\forall j > 1: a_{11} \mid a_{1j}$

Multipliziere A von links und rechts mit Permutationsmatrizen $\Rightarrow$ oBdA $a_{11} \nmid a_{22}$
aber $a_{11} \mid a_{12}, a_{21}$.

Schreibe $\begin{cases} \underline{a_{12} = a_{11} r} \\ \underline{a_{21} = a_{11} s} \end{cases}$ mit $r, s \in R$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & \\ \hline 0 & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{\det = 1} \cdot \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & * \\ a_{21} & a_{22} & \\ \hline * & & * \end{array}\right) \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -r & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{\det = 1} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & 0 & * \\ 0 & a'_{22} & \\ \hline * & & * \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \underline{a_{21} - s a_{11}} & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & * \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \underline{a_{12} - a_{11} r} \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Dabei ist $a_{11} \nmid a'_{22}$. Ersetze $A \rightsquigarrow$ oBdA $a_{12} = a_{21} = 0$.

Schreibe $x = \frac{a_{11}}{d}$, $y = \frac{a_{22}}{d}$, $d = \operatorname{ggT}(a_{11}, a_{22})$ und $1 = xu + yv$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ -vy & ux & \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{\det = 1} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & 0 & * \\ 0 & a_{22} & \\ \hline * & & * \end{array}\right) \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} u & -y & \\ v & x & \\ \hline & & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)}_{\det = 1} = \begin{pmatrix} d & * & \sim \\ * & * & \sim \\ \langle\,\rangle & & \end{pmatrix}$$

qed (Lemma 1).

Lemma 2: $\exists\, U, V$ invertierbar so dass $UAV = (b_{ij})_{ij}$ mit $b_{11} \mid b_{ij}$ für alle i,j.

Beweis: $A^{(0)} := A$. Nach dem k-ten Schritt sei

$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})$. Falls $\exists\, i,j: a_{11}^{(k)} \nmid a_{ij}^{(k)}$ Wende Lemma 1 an!

$$\rightsquigarrow A^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k+1)}) \text{ mit } \underbrace{a_{11}^{(k+1)} \mid a_{11}^{(k)} \nmid a_{11}^{(k+1)}}_{\Rightarrow\ (a_{11}^{(k)}) \subsetneq (a_{11}^{(k+1)})}$$

$\parallel$

$U^{(k)} A^{(k)} V^{(k)}$ mit $U^{(k)}, V^{(k)}$ invertierbar.

R noethersch $\Rightarrow$ bricht ab. Also $\exists k: \forall i,j: a_{11}^{(k)} \mid a_{ij}^{(k)}$.

$$A^{(k)} = U^{(k-1)} \cdots U^{(0)} \cdot A \cdot V^{(0)} \cdots V^{(k-1)}$$

qed.

Beweis des Satzes: Ersetze A durch AUV wie in Lemma 2 $\Rightarrow a_{11} \mid a_{ij}$ für alle i,j.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -u_2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -u_m & & & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -v_2 & \cdots & -v_n \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$u_i = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \in R \qquad v_j = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \in R.$$

Ersetze $A \Rightarrow$ oBdA $A = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$ mit $a_{11} \mid A'$.

Falls $a_{11} = 0 \Rightarrow$ fertig.

Sonst:

Annahme:

Zur Induktion über $\min\{m, n\} \Rightarrow \exists\, U', V'$ invertierbar mit $U'A'V' = \left(\begin{array}{ccc|c} e_2 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & e_k & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$

mit $e_2, \dots, e_k \in R\setminus\{0\}$ und $e_2 \mid e_3 \mid \dots \mid e_k$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} a_{11} & & 0 & & \\ \hline 0 & e_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & e_k & \\ \hline 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right)$$ mit $a_{11} \mid e_2$.

qed.