5 Strukturtheorie von Gruppen

5.1 Einfache Gruppen

5.1.1 Definition: Eine Gruppe G, die nichttrivial ist und nur 1 und G als Normalteiler hat, heisst *einfach.*

5.1.2 Proposition: Eine abelsche Gruppe ist genau dann einfach, wenn sie zyklisch von Primzahlordnung ist.

Bew.: G abelsch einfach $\Rightarrow \exists g \in G \setminus \{1\}$. $\Rightarrow 1 \neq \langle g \rangle \triangleleft G \Rightarrow G = \langle g \rangle$.

Also ist $G \cong \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 2$.

$0 \neq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z} \Rightarrow$ nicht einfach.

Wäre $1 < m < n$, $m \mid n$, wäre $\{0\} \neq m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Rightarrow$ nicht einfach.

Also ist n prim.

Umkehrung: Sei p Primzahl $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \neq \{0\}$.

und $\forall a \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$: $\operatorname{ggT}(a,p) \sim 1$. $\Rightarrow \exists u,v \in \mathbb{Z}$: $au + pv = 1$.

$\Rightarrow u \cdot [a] = [ua] = [1-pv] = [1] \Rightarrow [a]$ erzeugt $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ einfach. qed.

5.1.3 Satz: Für jedes $n \geqslant 5$ gilt:

(a) Die Gruppe A_n ist einfach.

(b) Die einzigen normalen Untergruppen von S_n sind 1 und A_n und S_n.

$$\begin{array}{l} S_n \\ \mid \\ A_n \\ \mid \\ 1 \end{array} \quad S_n/A_n \cong \{\pm 1\} \text{ einfach}$$

$$\begin{array}{l} S_4 \\ \mid \\ A_4 \\ \mid \\ K = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \\ \mid \\ 1 \end{array}$$

Erinnerung: A_n ist von allen 3-Zykeln erzeugt.

Beweis (a) $|A_n| = \frac{n!}{2} > 1 \Rightarrow A_n \neq 1$.

Sei $1 \neq H \trianglelefteq A_n$. Zu zeigen: $H = A_n$.

Wähle $1 \neq \sigma \in H$. Wähle $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq \sigma i$.

Da $n \geq 5$ ist, existiert $j \in$ " mit $j \neq i, \sigma i, \sigma^2 i$.

Setze $\tau := (i\ \sigma i\ j) \in A_n$.

$\Rightarrow {}^{\sigma}\tau = (\sigma i\ \sigma^2 i\ \sigma j) = (\sigma j\ \sigma i\ \sigma^2 i)$

Wegen $j \neq \sigma^2 i$ ist $\tau(\sigma i) = j \neq \sigma^2 i = {}^{\sigma}\tau(\sigma i)$. Also ist $\tau \neq {}^{\sigma}\tau$.

$\Rightarrow [\tau, \sigma] = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = \tau \cdot ({}^{\sigma}\tau)^{-1} \neq 1$. und $[\tau, \sigma] = (i\ \sigma i\ j)(\sigma j\ \sigma^2 i\ \sigma i)$

$= {}^{\tau}\sigma \cdot \sigma^{-1} \in H$

$5 = \cancel{4+1} = \cancel{3+2}$

$= 3+1+1 = 2+2+1$

$= \cancel{2+1+1+1} = \cancel{1+1+1+1+1}$

Also enthält H ein Element $\rho \neq 1$, das höchstens 5 Ziffern bewegt.

ρ 5-Zykel $\Rightarrow \rho = (a\ b\ c\ d\ e) \in H$

$H \ni {}^{(a\,b\,c)}\rho = (b\ c\ a\ d\ e)$

$H \ni {}^{(a\,b\,c)}\rho \cdot \rho^{-1} = (a\ b\ d)(c)(e) =$ 3-Zykel!

$\rho = (a\ b)(c\ d)$ Wähle $e \neq a, b, c, d$

$^{(a\ b\ e)}\rho \cdot \rho^{-1} = (b\ e)(c\ d) \cdot (a\ b)(c\ d) = (a\ b\ e) = 3$-Zykel. $\in H$.

Also enthält H einen 3-Zykel $\pi = (a\ b\ c)$.

Sei $\omega \in S_n$ ein beliebiger 3-Zykel. Dann $\exists\ \tau \in S_n$: $\omega = {}^{\tau}\pi$.

Da $n \geq 5$ existieren $d \neq e$, beide $\notin \{a, b, c\}$. Dann ist ${}^{(d\ e)}\pi = \pi \Rightarrow {}^{\tau(d\ e)}\pi = {}^{\tau}\pi = \omega$.

Da $\tau \in A_n$ oder $\tau(d\ e) \in A_n$ folgt $\omega \in H$.

Also enthält H alle 3-Zykel und es folgt $H = A_n$.

(b) Sei $1 \neq H \underset{\neq}{\lhd} S_n$.

Dann ist $H \cap A_n \lhd A_n$.

Ist $H \cap A_n \neq 1$, dann folgt aus (a) $H \cap A_n = A_n$

$\Rightarrow A_n \subset H \Rightarrow A_n = H$ da $[S_n : A_n] = 2$.

Sonst ist $H \cap A_n = 1 \Rightarrow H \xrightarrow{\sim} \dfrac{H}{H \cap A_n} \xrightarrow{\sim} \dfrac{H \cdot A_n}{A_n} < S_n / A_n = \{\pm 1\}$.

$\Rightarrow |H| = 2 \Rightarrow H = \{1, \sigma\}$ für σ der Ordnung 2. Wegen $H \lhd S_n$ ist σ im Zentrum von S_n.

$\Rightarrow$ Widerspruch.

Übung: $n \geq 3 \Rightarrow Z(S_n) = 1$.

qed