Erinnerung: Eine Gruppe G, die nichttrivial ist und nur 1 und G als Normalteiler hat, heisst *einfach*.

5.1.4 Satz: Für jeden Körper K und jedes $n \geqslant 2$ ist die Gruppe

$$\mathrm{PSL}(n, K) \;:=\; \mathrm{SL}_n(K)/\{\lambda I_n \mid \lambda \in K^\times,\ \lambda^n = 1\}$$

Zentrum von $SL_n(K)$.

einfach, ausser für $n = 2$ und $|K| \leqslant 3$.

(ohne Beweis)

5.1.5 Bemerkung: Für $q := |K| < \infty$ ist

$$|\,\mathrm{PSL}(2, K)| \;=\; \begin{cases} q^3 - q & \text{für } q \text{ gerade,} \\ \frac{q^3-q}{2} & \text{für } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$|SL_2(K)| = (q^2-1) \cdot \frac{q^2-q}{q-1} = q^3 - q.$$

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$

für $n \geq 5$.

5.2 Subnormalreihen

5.2.1 Definition: (a) Eine Folge von Untergruppen $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = G$, deren jede normal in der nächsten ist, heisst eine *Subnormalreihe von G*.

(b) Eine Untergruppe, welche in einer Subnormalreihe von G auftaucht, heisst eine *subnormale Untergruppe von G*.

Erinnerung: (a) Die *Kommutatorgruppe* $[G, G]$ einer Gruppe G ist die von allen *Kommutatoren* $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ für alle $g, h \in G$ erzeugte Untergruppe.

(b) Für eine normale Untergruppe $N \lhd G$ ist die Faktorgruppe G/N genau dann abelsch, wenn N die Kommutatorgruppe $[G, G]$ enthält.

5.2.2 Definition: Die *höheren Kommutatorgruppen von G* sind definiert durch $G^{(0)} := G$ und $G^{(i+1)} := [G^{(i)}, G^{(i)}]$ für alle $i \geqslant 0$ und bilden eine Folge

$$G = G^{(0)} \rhd \ldots \rhd G^{(i)} \rhd G^{(i+1)} \rhd \ldots.$$

Dabei sind alle Subfaktoren $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ abelsch.

Erinnerung: Betrachte eine Gruppe G mit Untergruppen $H < G \rhd N$.

Erster Isomorphiesatz: Es ist $H \cap N \lhd H$ und $HN < G$ und wir haben einen Isomorphismus

$$\boxed{\frac{H}{H \cap N} \xrightarrow{\sim} \frac{HN}{N}, \; h(H \cap N) \mapsto hN.}$$

Zweiter Isomorphiesatz: Ist $N \subset H \lhd G$, so haben wir einen Isomorphismus

$$\boxed{\frac{G}{H} \xrightarrow{\sim} \frac{G/N}{H/N}, \; gH \mapsto (gN)(H/N).}$$

5.2.3 Proposition: Betrachte eine Subnormalreihe $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = G$.

(a) Für jede Untergruppe $H < G$ ist $1 = H \cap G_0 \lhd H \cap G_1 \lhd \ldots \lhd H \cap G_m = H$ eine Subnormalreihe von H, und für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ gilt

$$\frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i-1}} \cong \frac{(H \cap G_i)G_{i-1}}{G_{i-1}} < \frac{G_i}{G_{i-1}}.$$

(b) Für jeden Normalteiler $N \lhd G$ ist $1 = G_0N/N \lhd G_1N/N \lhd \ldots \lhd G_mN/N = G/N$ eine Subnormalreihe von G/N, und für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ gilt

$$\frac{G_iN/N}{G_{i-1}N/N} \cong \frac{G_i/G_{i-1}}{(G_i \cap N)G_{i-1}/G_{i-1}} \twoheadleftarrow \frac{G_i}{G_{i-1}}.$$

Beweis (a): $\forall\, 1 \le i \le m : \forall\, h \in H \cap G_i : \; {}^h(H \cap G_{i-1}) = \underbrace{{}^hH}_{\substack{H \\ \text{da } h\in H}} \cap \underbrace{{}^hG_{i-1}}_{\substack{G_{i-1} \\ \text{da } h \in G_i}} = H \cap G_{i-1}.$

Also $H \cap G_{i-1} \lhd H \cap G_i$.

1. Isomorphiesatz für $H \cap G_i < G_i \rhd G_{i-1}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i-1}} = \frac{H \cap G_i}{(H \cap G_i) \cap G_{i-1}} \xrightarrow{\sim} \frac{(H \cap G_i)\cdot G_{i-1}}{G_{i-1}} < \frac{G_i}{G_{i-1}} \qquad ✓$$

(b) $\forall\, 1 \le i \le m$: Jedes Element von $\frac{G_iN}{N}$ ist repräsentiert durch ein $g_i \in G_i$.

$$\Rightarrow \quad {}^{g_i}(G_{i-1}N) = {}^{g_i}\underbrace{G_{i-1}}_{G_{i-1}} \cdot \underbrace{{}^{g_i}N}_{N} = G_{i-1}N.$$

$$\boxed{\text{Also } {}^{g_i}\left(\frac{G_{i-1}N}{N}\right) = \frac{{}^{g_i}(G_{i-1}N)}{N} = \frac{G_{i-1}N}{N}}$$ Korrektur

$$\Rightarrow \quad \frac{G_{i-1}N}{N} \lhd \frac{G_iN}{N}.$$

$$\frac{G_iN/N}{G_{i-1}N/N} \cong \frac{G_iN}{G_{i-1}N} = \frac{G_i(G_{i-1}N)}{G_{i-1}N} \xleftarrow{\sim} \frac{G_i}{G_i \cap (G_{i-1}N)} = \frac{G_i}{G_{i-1}\cdot(G_i \cap N)} \cong \frac{G_i/G_{i-1}}{(G_i \cap N)G_{i-1}/G_{i-1}}$$

qed.

5.3 Kompositionsreihen

5.3.1 Definition: Eine Subnormalreihe $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = G$, bei der alle *Subfaktoren* G_i/G_{i-1} einfache Gruppen sind, heisst *Kompositionsreihe von G*.

5.3.2 Proposition: Jede endliche Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe.

Beweis: Induktion über $|G|$.
$|G| = 1 \Rightarrow 1 = G_0 = G$ Kompositionsreihe.
$|G| > 1 \Rightarrow$ sei $N \underset{\neq}{\trianglelefteq} G$ mit $|N|$ maximal.

Dann ist G/N einfach, denn $N \neq G \Rightarrow G/N \neq 1$.
Jede normale UGr. in G/N ist H/N für $N < H \lhd G$.
$H/N \neq G/N \Leftrightarrow H \neq G$. Max. von $|N| \Rightarrow H = N$. ✓
$|N| < |G| \Rightarrow \exists$ KompReihe $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = N \lhd G$ qed.

5.3.3 Beispiel: Für jedes $n \geqslant 5$ ist $1 \lhd A_n \lhd S_n$ eine Kompositionsreihe von S_n. Eine Kompositionsreihe von S_4 ist zum Beispiel, mit den jeweiligen Indizes:

$$1 \overset{2}{\lhd} \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle \overset{2}{\lhd} \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \overset{3}{\lhd} A_4 \overset{2}{\lhd} S_4.$$

5.3.4 Beispiel: Die Gruppe $\mathbb{Z}$ besitzt keine Kompositionsreihe.

Denn: Sei $1 = G_0 \underset{\neq}{\lhd} G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = \mathbb{Z}$. Dann ist $G_1 = n\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 1$
$\Rightarrow G_1 \cong \mathbb{Z}$ nicht einfach.
$\Rightarrow$ keine Komp. Reihe. qed.

5.3.5 Beispiel: Die Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ besitzt genau die zwei Kompositionsreihen

$$0 \overset{2}{\lhd} 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \overset{3}{\lhd} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z},$$
$$0 \overset{3}{\lhd} 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \overset{2}{\lhd} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

5.3.6 Definition: Zwei Subnormalreihen $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = G$ und $1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G$ heissen *äquivalent*, wenn $m = n$ ist und ein $\sigma \in S_n$ existiert mit

$$\forall 1 \leqslant i \leqslant n \colon\ G_i/G_{i-1} \cong H_{\sigma i}/H_{\sigma i-1}.$$

5.3.7 Satz: *(Jordan-Hölder)* Je zwei Kompositionsreihen sind äquivalent.

5.3.8 Bemerkung: In gewissem Sinn kann man eine Kompositionsreihe als feinstmögliche Faktorisierung einer Gruppe ansehen. Die einfachen Subfaktoren spielen dann die Rolle der Primzahlen, und der Satz von Jordan-Hölder entspricht der eindeutigen Primfaktorzerlegung.

5.3.9 Definition: Eine Subnormalreihe, welche aus einer gegebenen Subnormalreihe durch Hinzufügen weiterer Terme entsteht, heisst eine *Verfeinerung.*

5.3.10 Satz: *(Schreier)* Je zwei Subnormalreihen besitzen äquivalente Verfeinerungen.

Beweis von 5.3.7: Seien $\left.\begin{array}{l} 1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G \\ 1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_n = G \end{array}\right\}$ Kompositionsreihen.

Wähle äquivalente Verfeinerungen. Die Subfaktoren in der Verfeinerung von $G_\bullet$ sind die Subfaktoren von $G_\bullet$ und triviale Gruppen. Analog für $H_\bullet$. ...

qed.

5.3.11 Schmetterlingslemma: *(Zassenhaus)* Für alle $H' \lhd H < G$ und $K' \lhd K < G$ gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & H'(H \cap K') \lhd H'(H \cap K) < H, \\ \text{(b)} & (H' \cap K)K' \lhd (H \cap K)K' < K, \text{ und} \\ \text{(c)} & \dfrac{H'(H \cap K)}{H'(H \cap K')} \cong \dfrac{(H \cap K)K'}{(H' \cap K)K'}. \end{array}$$

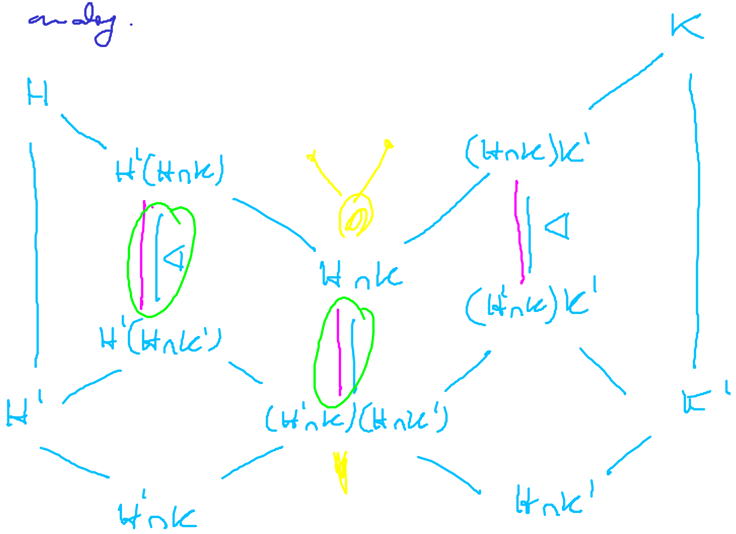
Bew.: (a) 1. Isosatz für $H \cap K < K \rhd K' \Rightarrow H \cap K' = (H \cap K) \cap K' \lhd H \cap K$.

" " $H \cap K' < H \rhd H' \Rightarrow H'(H \cap K') < H'(H \cap K) < H$

$\Rightarrow H'(H \cap K') \lhd H'(H \cap K)$

(b) analog.

(c)



$$\frac{H \cap K}{(H' \cap K)(H \cap K')} = \frac{H \cap K}{(H' \cap (H \cap K)) \cdot (H \cap K')} = \frac{H \cap K}{(H'(H \cap K')) \cap (H \cap K)} \overset{\text{1. Isosatz}}{\cong} \frac{H'(H \cap K') \cdot (H \cap K)}{H'(H \cap K')} = \frac{H'(H \cap K)}{H'(H \cap K')}$$

analog $\cong \dfrac{(H \cap K)K'}{(H' \cap K)K'}$.

qed

Beweis von S. 3. 10: Betrachte Schreier-Reihen $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_m = G$
$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \dots \lhd H_n = G$.

Für jedes $1 \le i \le m$ und $0 \le j \le n$ setze $G_{ij} := G_{i-1} \cdot (G_i \cap H_j)$.

$$\Rightarrow \quad G_{i-1} = G_{i0} \lhd G_{i1} \lhd \dots \lhd G_{in} = G_i$$

Teil (a) von S. 3.11.

$\Rightarrow \quad 1 = G_{10} \lhd G_{11} \lhd \dots \lhd G_{1n} = G_1 = G_{20} \lhd \dots$ Verfeinerung von $G_\bullet$.

Analog für jedes $0 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$ setze $H_{ij} := (G_i \cap H_j) \cdot H_{j-1}$

$\Rightarrow \quad 1 = H_{01} \lhd H_{11} \lhd \dots \lhd H_{m1} = H_1 = H_{02} \lhd \dots$ Verfeinerung von $H_\bullet$.

$\forall\, 1 \le i \le m \;\forall\, 1 \le j \le n$:

$$\frac{G_{ij}}{G_{i,j-1}} = \frac{G_{i-1}(G_i \cap H_j)}{G_{i-1}(G_i \cap H_{j-1})} \cong \frac{(G_i \cap H_j) H_{j-1}}{(G_{i-1} \cap H_j) H_{j-1}} = \frac{H_{ij}}{H_{i-1,j}}$$

q.e.d.

Teil (c) von S. 3.11.

für $G_{i-1} \lhd G_i < G$

und $H_{j-1} \lhd H_j < G$.