5.4 Auflösbare Gruppen

5.4.1 Definition: Eine Gruppe G heisst *auflösbar*, wenn sie eine Subnormalreihe $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = G$ besitzt, bei der alle Subfaktoren G_i/G_{i-1} abelsch sind.

SNR

5.4.2 Beispiel: Jede abelsche Gruppe ist auflösbar.

5.4.3 Beispiel: Für jedes $n \geqslant 1$ ist die Diedergruppe D_n auflösbar.

Nimm $1 \lhd \mathbb{Z}_n \underset{\text{Index } 2}{\lhd} D_n$ mit $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_n/1$ abelsch
und $D_n/\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_2$ " .

5.4.4 Satz: Die symmetrische Gruppe S_n ist auflösbar genau dann, wenn $n \leqslant 4$ ist.

$n \leq 2 \Rightarrow S_n$ abelsch.

$n = 3 \Rightarrow S_3 \cong D_3$

$n = 4$: $1 \overset{4}{\lhd} K \overset{3}{\lhd} A_4 \overset{2}{\lhd} S_4$ mit $K \cong \mathbb{Z}_2^2$ abelsch. (Kompositionsreihe $1 \lhd \langle (12)(34) \rangle \lhd K \lhd A_4 \lhd S_4$)

$n \geq 5$: $1, A_n, S_n$ einzigen normalen Untergruppen von S_n.
Die einzigen SNR sind $1 \lhd S_n$ und $1 \lhd A_n \lhd S_n$. qed

5.4.5 Proposition: Eine einfache Gruppe ist auflösbar genau dann, wenn sie abelsch ist.

Beweis: G einfach und G abelsch $\Rightarrow 1 = G_0 \lhd G_1 = G$ SNR mit $G_1/G_0 \cong G$ abelsch.
$\Rightarrow G$ auflösbar.

G nicht abelsch $\Rightarrow G_{m-1} \underset{\neq}{\lhd} G \Rightarrow G_{m-1} = 1 \Rightarrow G/G_{m-1} \cong G$ ist nicht abelsch!

qed

5.4.6 Beispiel: Für jeden Ring R und jede natürliche Zahl n ist die Gruppe B der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(R)$ auflösbar. Genauer ist für jedes $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\boxed{U_k \;:=\; \left\{(a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(R) \;\middle|\; a_{ij} = \delta_{ij} \text{ für alle } i > j-k\right\}}$$

eine normale Untergruppe von B, und die Subnormalreihe $1 = U_n \lhd \ldots \lhd U_1 \lhd U_0 = B$ hat abelsche Subquotienten

$$U_k/U_{k+1} \;\cong\; \begin{cases} (R^\times)^n & \text{für } k = 0, \\ R^{n-k} & \text{für } 1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall i,j: a_{ij} \in R \\ \forall i: a_{ii} \in R^\times \end{array} \right\}$$

$$k>0: U_k = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{\}}k-1$$

Homo: $B \to (R^\times)^n$, $(a_{ij})_{i,j} \mapsto (a_{ii})_{i=1}^n$ mit Kern U_1 $\Rightarrow U_1 \lhd B$ und B/U_1 abelsch.

Für jedes $1 \leq k < n$: $U_k \to R^{n-k}$, $(a_{ij})_{i,j} \mapsto \begin{pmatrix} a_{1,k+1} \\ a_{2,k+2} \\ \vdots \\ a_{n-k,n} \end{pmatrix}$ Homo mit Kern U_{k+1} $\Rightarrow U_{k+1} \lhd U_k$ und U_k/U_{k+1} abelsch.

$$\begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{ij} \begin{pmatrix} b_{jk} \end{pmatrix}_{jk} = \begin{pmatrix} \sum_j a_{ij} b_{jk} \end{pmatrix}_{ik},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

5.4.7 Proposition: (a) Jede Untergruppe und jede Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.

(b) Für jeden Normalteiler $N \lhd G$ ist G auflösbar genau dann, wenn N und G/N auflösbar sind.

Beweis (a): Sei $1 = G_0 \lhd \ldots \lhd G_m = G$ mit $\forall i$: G_i/G_{i-1} abelsch.

5.2.4 $\forall H < G$: $1 = H \cap G_0 \lhd H \cap G_1 \lhd \ldots \lhd H \cap G_m = H$ mit $\forall i$: $\frac{H \cap G_i}{H \cap G_{i-1}} \hookrightarrow \frac{G_i}{G_{i-1}}$ $\Rightarrow$ abelsch. ✓

$\forall N \lhd G$: $1 = \frac{N \cdot G_0}{N} \lhd \frac{N \cdot G_1}{N} \lhd \ldots \lhd \frac{N \cdot G_m}{N} = \frac{G}{N}$ mit $\forall i$: $\frac{NG_i/N}{NG_{i-1}/N} \twoheadleftarrow \frac{G_i}{G_{i-1}}$ $\Rightarrow$ abelsch ✓.

(b) "$\Rightarrow$" folgt aus (a).

"$\Leftarrow$" Wähle SNR $1 = N_0 \lhd N_1 \lhd \ldots \lhd N_r = N$ mit $\forall i$: N_i/N_{i-1} abelsch.

und SNR $1 = \bar{G}_0 \lhd \bar{G}_1 \lhd \ldots \lhd \bar{G}_s = G/N$: $\forall j$: $\bar{G}_j/\bar{G}_{j-1}$ abelsch.

Jedes $\bar{G}_j = G_j/N$ für $N \lhd G_j < G$ und $N = G_0 \lhd \ldots \lhd G_s = G$ mit $\forall j$: $G_j/G_{j-1} \cong \bar{G}_j/\bar{G}_{j-1}$

$\Rightarrow 1 = N_0 \lhd \ldots \lhd N_r = G_0 \lhd \ldots \lhd G_s = G \rightarrow G$ auflösbar. qed

5.4.8 Proposition: Eine Gruppe ist auflösbar genau dann, wenn eine ihrer höheren Kommutatorgruppen gleich 1 ist.

Erinnerung: $G^{[0]} := G$, $G^{[n+1]} := [G^{[n]}, G^{[n]}]$.

$\Rightarrow$ $\ldots \lhd G^{[1]} \lhd G^{[0]} = G$ mit $\forall i$, $G^{[i]}/G^{[i+1]}$ abelsch.

Bew.: Falls $\exists n$: $G^{[m]} = 1$, ist dies eine SNR von G mit abelschen Subquotienten $\Rightarrow$ G auflösbar.

Sei jetzt G auflösbar. Wähle SNR $1 = G_m \lhd G_{m-1} \lhd \ldots \lhd G_0 = G$ mit $\forall i$: G_i/G_{i+1} abelsch.

Beh.: $\forall i$: $G^{[i]} < G_i$ Bew.: klar für $i=0$. Falls $G^{[i]} < G_i$, ist

$G^{[i+1]} = [G^{[i]}, G^{[i]}] < [G_i, G_i] < G_{i+1}$, da G_i/G_{i+1} abelsch. qed.

Insbesondere ist $G^{[m]} < G_m = 1 \Rightarrow G^{[m]} = 1$. qed.