5.5 Direkte und semidirekte Produkte

5.5.1 Proposition-Definition: Das kartesische Produkt von Gruppen $G_1 \times \ldots \times G_m$ mit komponentenweiser Multiplikation und dem Einselement $(1, \ldots, 1)$ ist eine Gruppe, genannt das *(äussere) direkte Produkt von* $G_1, \ldots, G_m$.

$m=2 \Rightarrow \kappa$ injektiv g.d.w. $G_1 \cap G_2 = \{1\}$.

5.5.2 Proposition: Für Untergruppen $G_1, \ldots, G_m$ von G ist die Abbildung

$$\kappa: \quad G_1 \times \ldots \times G_m \to G, \ (g_1, \ldots, g_m) \mapsto g_1 \cdots g_m$$

ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn gilt:

$$\boxed{\forall i \neq j \ \forall g_i \in G_i \ \forall g_j \in G_j : g_i g_j = g_j g_i.}$$

Beweis: $m=2$: Brauche $\forall g_1 \in G_1 \ \forall g_2 \in G_2$: $g_1 g_2 = \kappa((g_1,g_2)) = \kappa((1,g_2)\cdot(g_1,1))$
$= \kappa((1,g_2))\cdot\kappa((g_1,1)) = g_2 \cdot g_1$

allg. Fall analog. $\rightsquigarrow$ notwendige Bedingung.

Umgekehrt: $\forall g_i, h_i \in G_i$: $\kappa((g_1,g_2)(h_1,h_2)) = \kappa((g_1h_1, g_2h_2)) = g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h_1h_2 = \kappa((g_1,g_2))\cdot\kappa((h_1,h_2))$. qed.

5.5.3 Definition: Ist die obige Abbildung ein injektiver Gruppenhomomorphismus, so heisst ihr Bild das *(innere) direkte Produkt von* $G_1, \ldots, G_m$.

5.5.4 Beispiel: Die Kleinsche Vierergruppe ist das innere direkte Produkt

$$\langle(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4)\rangle \text{“}=\text{”} \langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle \times \langle(1\ 3)(2\ 4)\rangle.$$

Linksoperation mit $\forall n, n' \in N\ \forall h \in H:\ {}^h(nn') = {}^hn \cdot {}^hn'$

$\Rightarrow {}^h(n^{-1}) = ({}^hn)^{-1}$

5.5.5 Proposition-Definition: Betrachte eine Linksoperation einer Gruppe H auf einer Gruppe N, geschrieben $H \times N \to N$, $(h,n) \mapsto {}^hn$. Dann ist das kartesische Produkt $N \times H$ mit der Multiplikation

$$(n,h) \cdot (n',h') \ := \ (n \cdot {}^hn', hh')$$

und dem Einselement $(1,1)$ eine Gruppe, genannt das *(äussere) semidirekte Produkt von N und H* und geschrieben $N \rtimes H$. Diese besitzt $N \times \{1\} \cong N$ als Normalteiler und die Faktorgruppe ist isomorph zu H.

Beweis: $(1,1)\cdot(n',h') = (1 \cdot {}^1n', 1 \cdot h') = (n',h')$

$((n,h)\cdot(n',h'))\cdot(n'',h'') = (n \cdot {}^hn', hh')\cdot(n'',h'') = (n \cdot {}^hn' \cdot {}^{hh'}n'', hh'h'')$

$(n,h)\cdot((n',h')\cdot(n'',h'')) = (n,h)\cdot(n' \cdot {}^{h'}n'', h'h'') = (n \cdot {}^h(n' \cdot {}^{h'}n''), hh'h'')$

${}^hn' \cdot {}^h({}^{h'}n'') = {}^hn' \cdot {}^{hh'}n''$

$(\tilde n, \tilde h)(n,h) = (\tilde n \cdot {}^{\tilde h}n, \tilde h h) = (1,1)$

$\Leftrightarrow \tilde n \cdot {}^{\tilde h}n = 1 \wedge \tilde h h = 1$

$\Leftrightarrow \tilde h = h^{-1} \wedge \tilde n = {}^{\tilde h}n^{-1} = {}^{h^{-1}}n^{-1}$

$\Rightarrow (n,h)^{-1} = ({}^{h^{-1}}n^{-1}, h^{-1})$

Die Abb. $p: N \rtimes H \to H$, $(n,h) \mapsto h$ ist ein Homo.

$\mathrm{Ker}(p) = \{(n,1) \mid n \in N\} = \mathrm{Bild}(i)$ = normal.

Betrachte $i: N \hookrightarrow N \rtimes H$, $n \mapsto (n,1)$

Dies ist ein Homo da

$i(nn') = (nn',1) = (n \cdot {}^1n', 1 \cdot 1) = (n,1)\cdot(n',1) = i(n)\,i(n')$

Zusätzlich: $H \cong 1 \times H < N \rtimes H$.

5.5.6 Proposition-Definition: Seien $H < G \rhd N$ mit $G = NH$ und $N \cap H = 1$. Wie üblich sei ${}^h n := hnh^{-1}$. Dann ist die Abbildung

${}^{h}n' \cdot h = hn'h^{-1} \cdot h = hn'$

$$\kappa: \quad N \rtimes H \to G,\ (n,h) \mapsto nh$$

und nennen H ein Komplement von N

ein Isomorphismus, und wir nennen G das *(innere) semidirekte Produkt von N und H*. Als missbräuchliche Notation schreibt man dann auch oft $G = N \rtimes H = H \ltimes N$.

Beweis:

Wegen $N \lhd G$ ist dies eine Operation von H auf N.

κ: Homo? $\kappa((n,h)(n',h')) = \kappa(n \cdot {}^{h}n', hh') = n\,{}^{h}n'\,hh'$

$\kappa((n,h)) \cdot \kappa((n',h')) = nh\,n'h'$ ✓

κ surjektiv? nach Vor. ✓

κ injektiv? $\kappa((n,h)) = 1 \iff nh = 1 \iff n = h^{-1}$.

Dann ist $n = h^{-1} \in N \cap H = 1$. ✓

qed.

$\rtimes = \times \cup \lhd$

$N \rtimes H = G \rightsquigarrow N \lhd G$.

5.5.7 Beispiel: Für alle $n \geqslant 1$ ist $D_n \cong \overbrace{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}^{Z_n} \rtimes \{\pm 1\}$ vermöge der Operation

$$\boxed{\{\pm 1\} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad (i,k) \mapsto ik.}$$

$D_n = \langle S, T \rangle$

$N := Z_n = \langle T \rangle \lhd D_n$

$H := \langle S \rangle$ Ordnung 2

$N \cap H = \{1\}.$

$N \cdot H = D_n$

Identifiziere $H \cong \{\pm 1\}.$

$Z_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$STS^{-1} = T^{-1}$

5.5.8 Beispiel: Für alle $n \geqslant 2$ ist $S_n = A_n \rtimes \langle (1\ 2) \rangle$.

$A_n \lhd S_n$ Index 2. $\rightsquigarrow$ Für jede Untergruppe $H < S_n$ mit $|H| = 2$ und $H \not\subset A_n$ ist $S_n = A_n \rtimes H$.

5.5.9 Beispiel: Für alle $n \geqslant 6$ ist $S_n = A_n \rtimes \langle (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6) \rangle$.

Diese beiden Beispiele zeigen, dass der Kofaktor H in einem inneren semidirekten Produkt durch den Normalteiler N im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist, auch nicht bis auf Konjugation.

5.5.10 Beispiel: Die Gruppe aller abstandserhaltenden Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ ist das semidirekte Produkt des Normalteilers aller Translationen mit der orthogonalen Gruppe $O(n)$.

N $\qquad\qquad\qquad\qquad$ H

5.5.11 Beispiel: Für jeden Ring R und beliebige $m, n \geqslant 0$ betrachte die Linksoperation von $\mathrm{GL}_m(R) \times \mathrm{GL}_n(R)$ auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$ durch ${}^{(A,C)}B := ABC^{-1}$. Dann haben wir einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \rtimes \left(\mathrm{GL}_m(R) \times \mathrm{GL}_n(R)\right) & \xrightarrow{\sim} & \begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} < \mathrm{GL}_{m+n}(R), \\ (B,(A,C)) & \mapsto & \begin{pmatrix} I_m & B \\ O & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & BC \\ O & C \end{pmatrix}. \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline & * \end{array}\right) \end{array}$$

$$N = \left(\begin{array}{c|c} I_m & * \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \qquad H = \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_m & BC^{-1} \\ \hline 0 & I_n \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

mit der Operation:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} A & AB \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & ABC^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \longmapsto ABC^{-1}.$$

5.6 p-Gruppen

Sei p eine Primzahl.

5.6.1 Definition: Eine endliche Gruppe von p-Potenz-Ordnung heisst eine *p-Gruppe*.

5.6.2 Satz: Jede nichttriviale p-Gruppe G hat ein nichttriviales Zentrum.

Beweis: Betrachte die Operation von G auf $G \setminus \{1\}$ durch Konjugation. $\quad \forall g \in G : \forall h \in G : h \neq 1 \Rightarrow {}^g h \neq 1.$

$|G \setminus \{1\}| = |G| - 1 = p^n - 1$ für $n > 0$, also kein Vielfaches von p.

$\shortparallel$ Summe der Längen aller Bahnen.

$\Rightarrow \exists$ Bahn der Länge k mit $p \nmid k$. Sei h in dieser Bahn B,

dann ist $k = |B| = [G : \mathrm{Stab}_G(h)] =$ Teiler von $|G| = p^n$

$\Rightarrow k = 1.$

$\Rightarrow h \in Z(G)$, $h \neq 1$

$\Rightarrow Z(G) \neq \{1\}$

qed

5.6.3 Folge: Jede p-Gruppe ist auflösbar.

Beweis: Induktion über $|G|$.

$|G| = 1$ ✓

$|G| > 1 \Rightarrow Z(G) \neq 1$ und abelsch.

und $|G/Z(G)| < |G| \overset{IV}{\Rightarrow} G/Z(G)$ auflösbar $\Rightarrow G$ auflösbar.

qed.

H G

5.6.4 Proposition: Jede echte Untergruppe einer p-Gruppe ist echt in ihrem Normalisator enthalten.

Bem.: $\mathrm{Norm}_G(H) = \{ g\in G \mid {}^gH = H\}$. Wegen $H \lneq G$ ist $G\neq 1$. Also $Z(G)\neq 1$.

Induktion über $|G|$.

Fall 1: $Z(G) < H$. Betrachte $\bar H := H/Z(G) \lneq \bar G := G/Z(G)$. IV $\Rightarrow \mathrm{Norm}_{\bar G}(\bar H) \supsetneq \bar H$.

$\Rightarrow \exists g\in G\setminus H : \forall h\in H :$

$[g]\cdot[h]\cdot[g^{-1}] \in \bar H$.

$\iff ghg^{-1}\in H$.

Also ist $g\in \mathrm{Norm}_G(H)\setminus H$.

Fall 2: $Z(G) \not< H$.

Dann ist $Z(G) < \mathrm{Norm}_G(H)$.

$\Rightarrow \mathrm{Norm}_G(H) \supsetneq H$.

qed

5.6.5 Beispiel: Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch.

Bew.: G nicht abelsch der Ordnung p^2

$\Rightarrow |Z(G)| = p$.

$\Rightarrow Z(G) \cong \mathbb{Z}_p \cong G/Z(G)$

Wähle $g\in G\setminus Z(G)$

$\Rightarrow g$ kommutiert mit $Z(G)$,

$\Rightarrow g$ und $Z(G)$ erzeugen eine abelsche Untergruppe von G.

Diese ist echt grösser als $Z(G)$ also gleich G. qed.

2 Isomorphieklassen: $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$.

$\mathbb{Z}_{p^2}$.

5.6.6 Beispiel: Es gibt genau 5 Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung p^3. Darunter sind die abelschen die Isomorphieklassen von

$$\mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad \text{und} \quad (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^3.$$

Im Fall $p > 2$ sind die nichtabelschen die Isomorphieklassen der semidirekten Produkte

$$\begin{array}{rl} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{mit } \ {}^a b := (1+pa)b \text{ für alle } a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \\ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \text{mit } \ {}^a(b,c) := (b+ac, c) \text{ für alle } a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ und } (b,c) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2. \end{array}$$

Im Fall $p = 2$ sind die nichtabelschen die Isomorphieklassen der Diedergruppe D_4 sowie der *Quaternionengruppe*

$$Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

mit $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = k = -ji$ und $jk = i = -kj$ und $ki = j = -ik$.

5.6.7 Bemerkung: Die Quaternionengruppe ist kein semidirektes Produkt von echten Untergruppen.

$p=2$:

	D_4	Q
Elemente der Ordnung 2	ST^i, T^2 (5)	-1 (1)
" 4	$T^{\pm 1}$ (2)	$\pm i, \pm j, \pm k$ (6)

$D_4 = \langle S, T \mid S^2 = T^4 = STST = 1 \rangle$

$\mathbb{H} = \mathbb{R}\cdot 1 \oplus \mathbb{R}\cdot i \oplus \mathbb{R}\cdot j \oplus \mathbb{R}\cdot k$

$\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ bilinear.

Dies ist eine Divisionsalgebra = Schiefkörper.

$i^2 = -1 \implies i^{-1} = -i$.

Folge: $D_4 \not\cong Q$.