Erinnerung: Lemma 5.8.3: G nicht abelsch einfach $\Rightarrow \neg\exists\, H < G$: Index $2, 3, 4$.

5.8.4 Proposition: Jede Gruppe der Ordnung < 60 ist auflösbar.

5.8.5 Lemma: Jede nichtabelsche einfache Gruppe mit einer Untergruppe vom Index 5 ist isomorph zur A_5. $|A_5| = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60.$

5.8.6 Proposition: Jede einfache Gruppe der Ordnung 60 ist isomorph zu A_5.

$\Rightarrow$ nicht abelsch

Beweis: $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$|Syl_5(G)|$ teilt $2^2 \cdot 3$, $\equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow \in \{1, 6\}. \Rightarrow\ = 6$

Widerspruch

$|Syl_3(G)|$ teilt $2^2 \cdot 5$, $\equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow \in \{1, 4, 2\cdot 5\} \Rightarrow\ = 10$

$|Syl_2(G)|$ teilt $3 \cdot 5 \Rightarrow \in \{1, 3, 5, 15\} \Rightarrow \in \{5, 3\cdot 5\}$

$\#Syl_5(G) = 6.$
$|Nor_G(Z_5)| = 5 \cdot 2$
$Nor_G(Z_5) = Z_5 \rtimes Z_2$

$\#Syl_3(G) = 10$
$Nor_G(Z_3) = Z_3 \rtimes Z_2$

$\hookrightarrow Nor_G$(2-Sylowgruppe) hat Index 5
$\Rightarrow$ fertig mit Lemma 5.8.5.

Wäre $Nor_G(Z_5) \cong Z_5 \times Z_2$
wäre $Nor_G(Z_2) > Z_5, P$
wähle $Z_2 < P \in Syl_2(G)$
Index 2 $\Rightarrow Z_2 \lhd P$
$\Rightarrow |Nor_G(Z_2)|$ Vielfaches von $4 \cdot 5$
$\Rightarrow$ Index teilt 3.

$\Rightarrow [G : Nor_G(Z_2)] = 3$ ↯
oder $G = Nor_G(Z_2)$
$\Rightarrow Z_2 \lhd G$ ↯.

Folge:
$Nor_G(Z_5) \cong D_5$

Analog
$Nor_G(Z_3) \cong D_3$.

$\#\, Syl_2(G) = 15$
Nor abelsch $=$ 2-Sylowgruppe

Annahme: $\exists\ S, S' \in Syl_2(G)$ mit $|\underbrace{S \cap S'}_{Z_2}| = 2$.

$N := Nor_G(Z_2) \supseteq S, S'$. Da $S \neq S'$ folgt: $N \supsetneq S$.

$\Rightarrow |N| = 4 \cdot \{3, 5, 3 \cdot 5\} \Rightarrow \text{Index} = \{\underbrace{5}_{\text{fertig.}}, \underbrace{3, 1}_{↯}\}$.

Also gilt für alle $S, S' \in Syl_2(G)$: $S \neq S' \Rightarrow S \cap S' = 1$.

$\Rightarrow \#\{g \in G \mid ord(g) \in \{2,4\}\} = \#(Syl_2(G)) \cdot (4-1) = 15 \cdot 3 = 45$

$\#\{g \in G \mid ord(g) = 5\} = \#(Syl_5(G)) \cdot (5-1) = 6 \cdot 4 = 24$

$69 > 60$ ↯. qed.

Anmerkung: Die nächst kleinste nicht abelsche einfache Gruppe hat Ordnung $168 = 8 \cdot 3 \cdot 7$ und ist $\cong SL_3(\mathbb{F}_2) \cong PSL_2(\mathbb{F}_7)$.

5.9 Klassifikation

Das Klassifikationsproblem der endlichen Gruppen ist die Aufgabe, alle endlichen Gruppen bis auf Isomorphie explizit zu beschreiben.

Hat eine endliche Gruppe G einen nichttrivialen echten Normalteiler N, so reduziert sich diese Aufgabe darauf, die Gruppen N und G/N sowie alle Möglichkeiten, die Gruppe G als *Erweiterung von G/N und N* zu konstruieren, zu beschreiben. Hat man das Erweiterungsproblem im Griff, so reduziert sich das allgemeine Problem also durch Induktion auf die Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen.

5.9.1 Satz: *(Feit-Thompson 1963)* Jede endliche Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar.
(Beweis etwa 270 Seiten)

Jede nichtabelsche endliche einfache Gruppe besitzt daher ein Element der Ordnung 2, genannt eine *Involution*. Als Programm zur Lösung des Klassifikationsproblem schlug der Gruppentheoretiker Richard Brauer vor, nichtabelsche endliche einfache Gruppen vermittels ihrer Involutionen, derer Zentralisatoren, und jeder Menge weiterer davon abgeleiteter Untergruppen zu studieren. Dabei ist von Nutzen:

5.9.2 Proposition: Je zwei Involutionen erzeugen zusammen eine Diedergruppe.

Bew.: σ, τ Ordg 2 $\Rightarrow \rho := \sigma\tau \Rightarrow \sigma\rho\sigma^{-1} = \underbrace{\sigma\sigma}_{1}\underbrace{\tau}_{\tau^{-1}}\sigma^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1} = (\sigma\tau)^{-1} = \rho^{-1}$.

$\sigma, \tau \in G$ endlich $\Rightarrow$ Sei $n = \mathrm{ord}(\rho) \Rightarrow \langle\sigma,\tau\rangle = \langle\sigma,\rho\rangle$ mit $\sigma^2 = \rho^n = 1$, $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1}$. $\Rightarrow D_n$. qed

Die Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen wurde Anfang der 1980er Jahre im wesentlichen abgeschlossen. Demnach sind die endlichen einfachen Gruppen bis auf Isomorphie genau:

(a) die zyklischen Gruppen C_p von Primzahlordnung p,

(b) die alternierenden Gruppen A_n für $n \geqslant 5$,

(c) die einfachen Gruppen *vom Lie-Typ*, konstruiert als Matrixgruppen über endlichen Körpern K wie zum Beispiel $\mathrm{PSL}(n, K)$,

(d) sowie 26 weitere *sporadische einfache Gruppen* verschiedener Ordnungen von $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 7920$ bis

$$\begin{aligned} &2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \\ = \;& 808017424794512875886459904961710757005754368000000000. \end{aligned}$$

Die kleinsten nichtabelschen einfachen Gruppen haben die Ordnungen 60, 168, 360, 504, 660, 1092, ... Vergleiche

`http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_finite_simple_groups`.

A_5 $SL_3(\mathbb{F}_2)$ A_6