Erinnerung:

6.3.1 Definition: Sei $f \in K[X]$ irreduzibel. Ein Oberkörper von K der Form $K(a)$ mit $f(a) = 0$ heisst ein *Stammkörper von f über K*.

6.3.3 Proposition: Jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ besitzt einen Stammkörper L über K. Dabei ist das Paar (L, a) bis auf eindeutige Isomorphie über K bestimmt.

6.3.4 Definition: Sei $f \in K[X] \smallsetminus \{0\}$. Ein Oberkörper von K der Form $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ mit

$$f(X) \;=\; \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) \qquad \text{in} \qquad L[X]$$

für ein $\alpha \in L^\times$ heisst ein *Zerfällungskörper von f über K*.

6.3.5 Proposition: Jedes Polynom $f \in K[X] \smallsetminus \{0\}$ besitzt einen Zerfällungskörper über K. Dieser ist bis auf Isomorphie über K bestimmt; der Isomorphismus ist aber im allgemeinen nicht eindeutig.

6.3.6 Beispiel: Der Körper $\mathbb{C}$ ist gleichzeitig Stamm- und Zerfällungskörper des Polynoms X^2+1 über $\mathbb{R}$. Verschiedene konkrete Realisierungen unterscheiden sich um einen Isomorphismus; zu jedem Isomorphismus gibt es aber auch den dazu komplex konjugierten Isomorphismus. Ich empfehle $\mathbb{C}$ zu betrachten als eine quadratische Erweiterung von $\mathbb{R}$ zusammen mit einem ausgewählten Element i mit $i^2+1=0$.

6.3.7 Beispiel: Betrachte die reellen Zahlen $a_1 := \sqrt[4]{5}$ und $a_2 := -a_1$ sowie die komplexen Zahlen $a_3 := ia_1$ und $a_4 := -a_3$. Dann besitzt $f(X) := \boxed{X^4 - 5}$ die Faktorisierung $(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)(X-a_4)$ über $\mathbb{C}$. Nach dem Eisensteinkriterium für $p=5$ ist $f(X)$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Für jedes j ist somit $\mathbb{Q}(a_j)$ ein Stammkörper von f über $\mathbb{Q}$, und es gilt $[\mathbb{Q}(a_j)/\mathbb{Q}] = 4$. Dabei sind $\mathbb{Q}(a_1) = \mathbb{Q}(a_2)$ und $\mathbb{Q}(a_3) = \mathbb{Q}(a_4)$, aber mit jeweils verschiedenen Erzeugenden. Weiter ist $L := \mathbb{Q}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Wegen $i^2+1=0$ und $i \notin \mathbb{Q}(a_1)$ gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5}, i)/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})] = 2$ und folglich $[L/\mathbb{Q}] = 8$.

6.3.8 Proposition: Für jeden Zerfällungskörper L eines Polynoms vom Grad n über K ist der Körpergrad $[L/K]$ ein Teiler von $n!$.

6.4 Algebraischer Abschluss

6.4.1 Proposition: Für jeden Körper K sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) Jedes ~~nichtkonstante~~ irreduzible Polynom in $K[X]$ besitzt eine Nullstelle in K.

(b) Jedes von Null verschiedene Polynom in $K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren über K.

(c) Jedes Polynom vom Grad $n \geqslant 0$ in $K[X]$ besitzt, mit Vielfachheiten gezählt, genau n Nullstellen in K.

(d) Jede endliche Erweiterung von K ist gleich K.

(e) Jede algebraische Erweiterung von K ist gleich K.

6.4.2 Definition: Ein Körper mit diesen Eigenschaften heisst *algebraisch abgeschlossen*.

Beweis: (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) schon bekannt.

(b) $\Rightarrow$ (e): Sei L/K algebraisch, sei $a \in L$ mit Min. Pol. $f \in K[X]$ über K.

$\overset{(b)}{\Rightarrow}$ $f(X) = \underset{\in K^\times}{\alpha} \cdot \prod_i (X - a_i)$ mit $a_i \in K$. Wegen $f(a) = 0$ folgt

$a = a_i$ für ein i $\Rightarrow$ $a = a_i \in K$. Also folgt $L = K$.

(e) $\Rightarrow$ (d) direkt.

(d) $\Rightarrow$ (b) Sei $f \in K[X]$ nicht konstant, L/K ein Zerfällungskörper $\Rightarrow$ L/K endlich $\overset{(d)}{\Rightarrow}$ $L = K$ $\Rightarrow$ (b)

qed.

6.4.3 Definition: Ein Oberkörper von K, welcher algebraisch über K und selbst algebraisch abgeschlossen ist, heisst ein *algebraischer Abschluss von K*. Ein solcher wird oft bezeichnet mit $\overline{K}$.

K^{alg}

6.4.4 Beispiel: Der Körper $\mathbb{C}$ ist ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{R}$. *(Fundamentalsatz für die Algebra)*

6.4.5 Beispiel: Der Unterkörper aller algebraischer Zahlen in $\mathbb{C}$ ist ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

$\overline{\mathbb{Q}}$

Klar: $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ algebraische Körpererweiterung.
Sei $f \in \overline{\mathbb{Q}}[X]$ ein irred. Polynom
Sei $a \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle

$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}(a)/\overline{\mathbb{Q}}$ endlich $\Rightarrow$ algebraisch
$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}}(a)/\mathbb{Q}$ algebraisch.
$\Rightarrow a$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow a \in \overline{\mathbb{Q}}$.
Also ist $\overline{\mathbb{Q}}$ alg. abg.

qed.

6.4.6 Satz: Je zwei algebraische Abschlüsse von K sind isomorph über K.

Beweis: Seien L, L' alg. Abschlüsse von K.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, dashed, "\exists \varphi"] & & L' \\ & K \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

Betrachte L' als Erweiterung von L via φ

L'/K alg $\Rightarrow L'/L$ algebraisch
L algebraisch abgeschlossen

$\Rightarrow$ "$L' = L$", d.h. φ Iso.

qed.

6.4.7 Vorsicht: Der Isomorphismus ist im allgemeinen nicht eindeutig. Deshalb sollte man stets nur von *einem* algebraischen Abschluss sprechen, und den bestimmten Artikel erst verwenden, nachdem man einen algebraischen Abschluss gewählt hat.

Bsp.: $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \{ id, \text{komplexe Konj.} \}$.