## 6.9 Inseparable Körpererweiterungen

**6.9.1 Proposition:** Sei $L = K(A)$ algebraisch über $K$ mit $p := \mathrm{char}(K) > 0$, und sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von $K$. Dann sind äquivalent:

(a) Für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in K$.

(b) Für jedes $a \in A$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in K$.

(c) $|\operatorname{Hom}_K(L, \overline{K})| = 1$.

**6.9.2 Definition:** Eine Körpererweiterung $L/K$ mit den obigen Eigenschaften heisst *rein inseparabel* oder *total inseparabel* oder *radiziell.*

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) ✓

(b) $\Rightarrow$ (c): Sei $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(L, \overline{K})$. Für jedes $a \in A$ sei $f(X) \in K[X]$ sein Min. Pol. über $K$.

Dann ist $f$ ein Teiler von $g := X^{p^r} - a^{p^r} \in K[X]$.

Sei $b$ eine Nullstelle von $g$ in $\overline{K}$ $\Rightarrow (X-b)^{p^r} = X^{p^r} - b^{p^r} = X^{p^r} - a^{p^r} = g$.

$\Rightarrow$ $b$ ist die einzige Nullstelle von $f$ in $\overline{K}$. $\Rightarrow \varphi(a) = b$. $\Rightarrow \varphi(a)$ eindeutig.

$L = K(A) \Rightarrow \varphi$ eindeutig.

(c) $\Rightarrow$ (b) Sei $a \in L$ mit Min. Pol. $f \in K[X]$. Für jede Nullstelle $b \in \overline{K}$ von $f$ existiert ein $\psi \in \operatorname{Hom}_K(K(a), \overline{K})$ mit $\psi(a) = b$.

Jedes $\psi$ setzt fort zu $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(L, \overline{K})$. Nach (c) ist $\varphi$ eindeutig $\Rightarrow \psi(a) = b$ eindeutig.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \overline{K} \\ K(a) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, "\psi"] & \\ & K \arrow[ul] \arrow[uu, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow f$ hat nur eine Nullstelle in $\bar{K}$. $\Rightarrow g$ hat nur eine Nullstelle $\Rightarrow g(x) = x - c$

$f$ irred. $\Rightarrow f(x) = g(x^{p^r})$ für $g \in K[x]$ separabel. $\Rightarrow f(x) = x^{p^r} - c \Rightarrow a^{p^r} = c \in K$ qed

**6.9.3 Beispiel:** Betrachte den rationalen Funktionenkörper $L := \mathbb{F}_p(X_1, X_2)$ und den Unterkörper $K := \mathbb{F}_p(X_1^p, X_2^p)$. Für jedes $f \in L$ gilt dann $f(X_1, X_2)^p = f(X_1^p, X_2^p) \in K$. Insbesondere ist $L/K$ rein inseparabel, und für jedes $f \in L \setminus K$ gilt $[K(f)/K] = p$. Wegen $[L/K] = p^2$ ist $L/K$ also nicht einfach.

Sei $a \in L$ mit $a^{p^r} \in K$, $r$ minimal $\Rightarrow a$ hat Min.Pol. $X^{p^r} - a^{p^r}$ über $K$ und $[K(a)/K] = p^r$.

Beweis: Sei $f \in K[X]$ das Min.Pol. Schreibe $f(X) = g(X^{p^s})$ für $g \in K[X]$ separabel und $s \geq 0$. $\rightsquigarrow g(X) = X - c$ für ein $c \in K$. $\Rightarrow f(X) = X^{p^s} - c$. $\Rightarrow s = r$. qed.

$[L/K] = [L/K(X_1)] \cdot [K(X_1)/K] = p^2$.

**6.9.4 Proposition:** Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ ist $M/K$ rein inseparabel genau dann, wenn $M/L$ und $L/K$ rein inseparabel sind.

(Beweis Übung)

**6.9.5 Proposition:** Jede algebraische Körpererweiterung $L/K$ besitzt einen eindeutigen Zwischenkörper $K'$, so dass $K'/K$ separabel und $L/K'$ rein inseparabel ist, nämlich

$$K' := \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}.$$

$$\begin{array}{c} L \\ | \\ K' \\ | \\ K \end{array} \begin{array}{l} \left.\right\} \text{rein inseparabel} \\ \\ \left.\right\} \text{separabel} \end{array}$$

(Beweis Übung)

**6.9.6 Vorsicht:** Eine Faktorisierung in die andere Richtung, das heisst ein Zwischenkörper $K''$ mit $L/K''$ separabel und $K''/K$ rein inseparabel, existiert im allgemeinen nicht.

## 6.10 Normale Körpererweiterungen

**6.10.1 Proposition:** Sei $L = K(A)$ algebraisch über $K$, und sei $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von $L$. Dann sind äquivalent:

(a) Jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$, das eine Nullstelle in $\overset{a\in}{L}$ besitzt, zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren.

(b) Für jedes $a \in L$ enthält $L$ einen Zerfällungskörper des Minimalpolynoms $m_{a,K}$.

(c) Für jedes $a \in A$ enthält $L$ einen Zerfällungskörper des Minimalpolynoms $m_{a,K}$.

(d) Für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{L})$ gilt $\varphi(L) = L$.

(e) Für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{L})$ gilt $\varphi(L) \subset L$.

$$\begin{tikzcd} & & \overline{L} \arrow[d, dash] \\ L \arrow[urr, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[drr, dash] & & L \arrow[d, dash] \\ & & K \end{tikzcd}$$

**6.10.2 Definition:** Eine Körpererweiterung $L/K$ mit den obigen Eigenschaften heisst *normal*.

Bew:

(a) $\Longleftrightarrow$ (b) direkt.

(b) $\Rightarrow$ (c) klar.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{L})$. Sei $a \in A$. $\Rightarrow \underset{\in K[X]}{m_{a,K}}(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ mit $a_i \in L$.

$\Rightarrow \forall i: m_{a,K}(\varphi(a_i)) = \varphi(m_{a,K}(a_i)) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi : \{a_1, \ldots, a_n\} \circlearrowleft$.

$\varphi$ injektiv $\Rightarrow \varphi|\{a_1, \ldots, a_n\}$ injektiv $\Rightarrow \varphi(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

$\Rightarrow \varphi(K(a_1, \ldots, a_n)) = K(a_1, \ldots, a_n)$ Variiere $a \in A \Rightarrow \varphi(L) = L$.

(d) $\Rightarrow$ (e) klar.

(e) $\Rightarrow$ (b): Sei $a \in L$ und $m_{a,K}(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ mit $a_i \in \overline{L}$ und $a_1 = a$.

Für jedes $i$ ist

$$\begin{tikzcd} K(a) \arrow[rr, "\varphi", "a \mapsto a_i"'] & & K(a_i) \\ & K \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

. Setze $\varphi$ fort zu $L \longrightarrow \overline{L}$ über $K$.

Nach (e) ist $\varphi(L) \subset L \Rightarrow a_i = \varphi(a) \in L$.

qed.

**6.10.3 Proposition:** Eine endliche Körpererweiterung ist normal genau dann, wenn sie Zerfällungskörper eines Polynoms ist.

Beweis: Ist $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ mit $f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i) \in K[X]$. Für jedes $a_i$ ist $m_{a_i,K} \mid f \Rightarrow$ zerfällt in Linearfaktoren in $L[X]$. $\Rightarrow L/K$ normal nach (c).

Sei umgekehrt $L/K$ endlich normal. Schreibe $L = K(b_1, \ldots, b_m)$.
$\overset{(c)}{\Rightarrow}$ $m_{b_i,K}$ zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren. $\Rightarrow f := \prod_{i=1}^{m} m_{b_i,K} \in K[X]$ ebenso.
$\Rightarrow L$ ist ein Zerfällungskörper von $f$ über $K$. qed.

**6.10.4 Beispiel:** Die triviale Erweiterung $K/K$ ist normal.

Bsp.: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist Zerfällungskörper von $(X^2 - 2)(X^2 - 3)$ über $\mathbb{Q}$.

**6.10.5 Beispiel:** Jeder algebraische Abschluss $\overline{K}/K$ ist normal.

Bemerkung (e).

**6.10.6 Beispiel:** Jede quadratische Körpererweiterung ist normal.

**6.10.7 Beispiel:** Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.

s.u.

**6.10.8 Proposition:** Sind $M/L/K$ algebraisch und ist $M/K$ normal, so ist auch $M/L$ normal.

Bew.: $M/K$ normal,
$\varphi \in \mathrm{Hom}_L(M, \overline{M}) \Rightarrow \varphi \in \mathrm{Hom}_K(M, \overline{M}) \overset{\text{(e) für } M/K}{\Longrightarrow} \varphi(M) \subset M. \overset{\text{(e) für } M/L}{\Longrightarrow} M/L$ normal.
qed.

$$\begin{array}{c} \overline{M} \\ | \\ M \\ | \\ L \\ | \\ K \end{array}$$

**6.10.9 Vorsicht:** Sind $M/L/K$ algebraisch und ist $M/K$ normal, so ist $L/K$ nicht notwendig normal, zum Beispiel für $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und $M$ ein Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

$M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})$
$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$
$K = \mathbb{Q}$

$\overline{\mathbb{Q}}$
$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot \sqrt[3]{2})$
$3 \quad \mathbb{Q} \quad 3$

**6.10.10 Vorsicht:** Sind $M/L$ und $L/K$ algebraisch und normal, so ist $M/K$ nicht notwendig normal. Zum Beispiel sind $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ jeweils normal vom Grad 2, aber $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.

$X^4 - 2$ irred. über $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \neq \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt[4]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(i \cdot \sqrt[4]{2})$
$|2$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
$|2$
$\mathbb{Q}$

**6.10.11 Definition:** Eine *normale Hülle* einer algebraischen Erweiterung $L/K$ ist eine minimale algebraische Erweiterung $\tilde{L}/L$, so dass $\tilde{L}/K$ normal ist.

**6.10.12 Proposition:** Ist $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ endlich über $K$, so ist jeder Zerfällungskörper des Polynoms $m_{a_1,K} \cdots m_{a_n,K}$ über $K$, der $L$ umfasst, eine normale Hülle von $L/K$.

$$\begin{array}{c}\tilde{L}\\ | \\ L \\ | \\ K\end{array}$$

**6.10.13 Proposition:** Jede algebraische Erweiterung $L/K$ besitzt eine normale Hülle. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie über $L$. (Der Isomorphismus ist aber im allgemeinen nicht eindeutig.)

Beweisskizze: Wähle $\bar{L}$ alg. Abschluss von $L$,

$$\tilde{L} := \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ a_1, \ldots, a_n \in L}} \left( \text{Zerfällungskörper von } \prod_{i=1}^{n} m_{a_i,K} \text{ in } \bar{L} \right) \quad \text{fertig.}$$

qed

**6.10.14 Proposition:** Sei $\tilde{L}$ eine normale Hülle einer algebraischen Erweiterung $L/K$.

(a) Ist $L/K$ endlich, so ist auch $\tilde{L}/K$ endlich.

(b) Ist $L/K$ separabel, so ist auch $\tilde{L}/K$ separabel.

Beweis: (a) 6.10.12.

(b) $\forall a \in L \Rightarrow m_{a,K}$ separabel.

$m_{a,K} = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ mit $a_i \in \overline{L} \Rightarrow$ Jedes $a_i$ ist separabel über $K$.

$\Rightarrow$ Zerfällungskörper $K(a_1, \ldots, a_n)/K$ separabel.

Vereinigen ... qed.