

6.9 Inseparable Körpererweiterungen

6.9.1 Proposition: Sei $L = K(A)$ algebraisch über K mit $p := \text{char}(K) > 0$, und sei \bar{K} ein algebraischer Abschluss von K . Dann sind äquivalent:

- (a) Für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geq 0$ mit $a^{p^r} \in K$.
- (b) Für jedes $a \in A$ existiert ein $r \geq 0$ mit $a^{p^r} \in K$.
- (c) $|\text{Hom}_K(L, \bar{K})| = 1$.

6.9.2 Definition: Eine Körpererweiterung L/K mit den obigen Eigenschaften heisst *rein inseparabel* oder *total inseparabel* oder *radiziell*.

Beweis: (a) \Rightarrow (b) \checkmark

(b) \Rightarrow (c): Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$. Für jedes $a \in A$ sei $f(x) \in K[x]$ sein Min. Pol. über K .

Dann ist f ein Teiler von $g := X^{p^r} - a^{p^r} \in K[x]$.

Sei b eine Nullstelle von g in $\bar{K} \Rightarrow (X-b)^{p^r} = X^{p^r} - b^{p^r} = X^{p^r} - a^{p^r} = g$.

$\Rightarrow b$ ist die einzige Nullstelle von f in $\bar{K} \Rightarrow \varphi(a) = b \Rightarrow \varphi(a)$ eindeutig.

$L = K(A) \Rightarrow \varphi$ eindeutig.

(c) \Rightarrow (b) Sei $a \in L$ mit Min. Pol. $f \in K[x]$. Für jede Nullstelle $b \in \bar{K}$ von f existiert ein $\psi \in \text{Hom}(K(a), \bar{K})$ mit $\psi(a) = b$.

Seien φ fest in $\varphi \in \text{Hom}_K(L, \bar{K})$. Nach (c) ist φ eindeutig $\Rightarrow \psi(a) = b$ eindeutig.



$\Rightarrow f$ hat nur eine Nullstelle in \bar{K} .
 f irreduzibel $\Rightarrow f(x) = g(x^{p^n})$ für $g \in K[x]$ separabel. $\Rightarrow f$ hat nur eine Nullstelle $\Rightarrow g(x) = x - c$
 $\Rightarrow f(x) = x^{p^n} - c \Rightarrow a^{p^n} = c \in K$

6.9.3 Beispiel: Betrachte den rationalen Funktionenkörper $L := \mathbb{F}_p(X_1, X_2)$ und den Unterkörper $K := \mathbb{F}_p(X_1^p, X_2^p)$. Für jedes $f \in L$ gilt dann $f(X_1, X_2)^p = f(X_1^p, X_2^p) \in K$. Insbesondere ist L/K rein inseparabel, und für jedes $f \in L \setminus K$ gilt $[K(f)/K] = p$. Wegen $[L/K] = p^2$ ist L/K also nicht einfach.

Sei $a \in L$ mit $a^{p^n} \in K$, n minimal
 $\Rightarrow a$ hat Min. Pol. $X^{p^n} - a^{p^n}$ über K
 und $[K(a)/K] = p^n$.

Beweis: Sei $f \in K[X]$ das Min. Pol.
 Schreibe $f(x) = g(x^{p^s})$ für $g \in K[x]$
 separabel und $s \geq 0$.
 was $g(x) = x - c$ für ein $c \in K$.
 $\Rightarrow f(x) = x^{p^s} - c \Rightarrow s = n$ gilt.

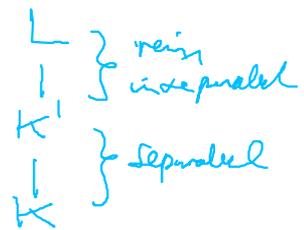
$$[L/K] = [L/K(a)] \cdot [K(a)/K] = p^2 \cdot p = p^3$$

6.9.4 Proposition: Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ ist M/K rein inseparabel genau dann, wenn M/L und L/K rein inseparabel sind.

(Beweis Übung)

6.9.5 Proposition: Jede algebraische Körpererweiterung L/K besitzt einen eindeutigen Zwischenkörper K' , so dass K'/K separabel und L/K' rein inseparabel ist, nämlich

$$K' := \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}.$$



(Beweis Übung)

6.9.6 Vorsicht: Eine Faktorisierung in die andere Richtung, das heisst ein Zwischenkörper K'' mit L/K'' separabel und K''/K rein inseparabel, existiert im allgemeinen nicht.

6.10 Normale Körpererweiterungen

6.10.1 Proposition: Sei $L = K(A)$ algebraisch über K , und sei \bar{L} ein algebraischer Abschluss von L . Dann sind äquivalent:

- (a) Jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$, das eine Nullstelle in L besitzt, zerfällt in $L[X]$ in Linearfaktoren.
- (b) Für jedes $a \in L$ enthält L einen Zerfällungskörper des Minimalpolynoms $m_{a,K}$.
- (c) Für jedes $a \in A$ enthält L einen Zerfällungskörper des Minimalpolynoms $m_{a,K}$.
- (d) Für jedes $\varphi \in \text{Hom}_K(L, \bar{L})$ gilt $\varphi(L) = L$.
- (e) Für jedes $\varphi \in \text{Hom}_K(L, \bar{L})$ gilt $\varphi(L) \subset L$.



6.10.2 Definition: Eine Körpererweiterung L/K mit den obigen Eigenschaften heisst *normal*.

Beweis:

(a) \Leftrightarrow (b) direkt.

(b) \Rightarrow (c) klar.

(c) \Rightarrow (d) Sei $\varphi \in \text{Hom}_K(L, \bar{L})$, Sei $a \in A$. $\Rightarrow m_{a,K}(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i)$ mit $a_i \in L$.

$\Rightarrow \forall i: m_{a,K}(\varphi(a_i)) = \varphi(m_{a,K}(a_i)) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi: \{a_1, \dots, a_n\} \hookrightarrow \bar{L}$

φ injektiv $\Rightarrow \varphi(\{a_1, \dots, a_n\})$ injektiv $\Rightarrow \varphi(\{a_1, \dots, a_n\}) = \{a_1, \dots, a_n\}$.

$\Rightarrow \varphi(K(a_1, \dots, a_n)) = K(a_1, \dots, a_n) \quad \forall$ min $a \in A \Rightarrow \varphi(L) = L$.

(d) \Rightarrow (e) klar.

(e) \Rightarrow (b): Sei $a \in L$ und $m_{a,K}(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$ mit $a_i \in \bar{L}$ und $a_1 = a$.

Für jedes i ist $K(a) \xrightarrow[\substack{\varphi \\ \text{als } a_i \\ K}}{\varphi} K(a_i)$. Setze φ fort zu $L \rightarrow \bar{L}$ über K .

Nach (e) ist $\varphi(L) \subset L \Rightarrow a_i = \varphi(a) \in L$.

qed.

6.10.3 Proposition: Eine endliche Körpererweiterung ist normal genau dann, wenn sie Zerfällungskörper eines Polynoms ist.

Bem: Ist $L = K(a_1, \dots, a_n)$ mit $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) \in K[x]$.

Für jedes a_i ist $m_{a_i, K} \mid f \Rightarrow$ zerfällt in Linearfaktoren in $L[K] \Rightarrow L/K$ normal nach (c).

Li: umgekehrt L/K endlich normal. Schreibe $L = K(b_1, \dots, b_m)$.

(c) $m_{b_i, K}$ zerfällt in $L[K]$ in Linearfaktoren $\Rightarrow f := \prod_{i=1}^m m_{b_i, K} \in K[x]$ ebenso.

$\Rightarrow L$ ist ein Zerfällungskörper von f über K . ged.

6.10.4 Beispiel: Die triviale Erweiterung K/K ist normal.

Bsp.: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist Zerfällungskörper von $(x^2 - 2)(x^2 - 3)$ über \mathbb{Q} .

6.10.5 Beispiel: Jeder algebraische Abschluss \bar{K}/K ist normal.

Beweis (e).

6.10.6 Beispiel: Jede quadratische Körpererweiterung ist normal.

6.10.7 Beispiel: Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.

s.u.

6.10.8 Proposition: Sind $M/L/K$ algebraisch und ist M/K normal, so ist auch M/L normal.

Bew.: n/k normal,
 $\varphi \in \text{Aut}_L(n, \bar{n}) \Rightarrow \varphi \in \text{Aut}_K(n, \bar{n}) \xrightarrow{\text{für } n/k} \varphi(n) \subset n \xrightarrow{(e)} \varphi(n) \subset n \xrightarrow{\text{für } n/L} n/L$
gen.

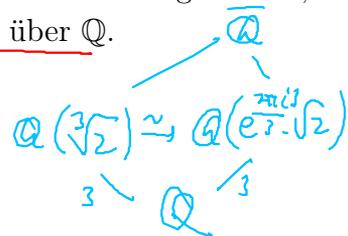


6.10.9 Vorsicht: Sind $M/L/K$ algebraisch und ist M/K normal, so ist L/K nicht notwendig normal, zum Beispiel für $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ und M ein Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über \mathbb{Q} .

$$n = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

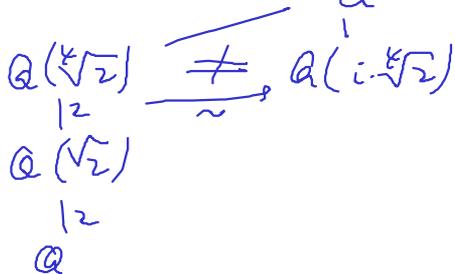
$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

$$K = \mathbb{Q}$$



6.10.10 Vorsicht: Sind M/L und L/K algebraisch und normal, so ist M/K nicht notwendig normal. Zum Beispiel sind $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ jeweils normal vom Grad 2, aber $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}$ ist nicht normal.

$X^4 - 2$ irreduzibel.
 \mathbb{Q}



6.10.11 Definition: Eine normale Hülle einer algebraischen Erweiterung L/K ist eine minimale algebraische Erweiterung \tilde{L}/L , so dass \tilde{L}/K normal ist.

6.10.12 Proposition: Ist $L = K(a_1, \dots, a_n)$ endlich über K , so ist jeder Zerfällungskörper des Polynoms $m_{a_1, K} \cdots m_{a_n, K}$ über K , der L umfasst, eine normale Hülle von L/K .

...



6.10.13 Proposition: Jede algebraische Erweiterung L/K besitzt eine normale Hülle. Diese ist eindeutig bis auf Isomorphie über L . (Der Isomorphismus ist aber im allgemeinen nicht eindeutig.)

Beweisidee: Wähle \bar{L} alg. Abschluss von L ,

$$\tilde{L} := \bigcup_{\substack{n \geq 0 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in L}} \left(\text{Zerfällungskörper von } \prod_{i=1}^n m_{\alpha_i, K} \text{ in } \bar{L} \right) \quad \text{Konstr.}$$

qed

6.10.14 Proposition: Sei \tilde{L} eine normale Hülle einer algebraischen Erweiterung L/K .

(a) Ist L/K endlich, so ist auch \tilde{L}/K endlich.

(b) Ist L/K separabel, so ist auch \tilde{L}/K separabel.

Beweis: (a) 6.10.12.

(b) $\forall a \in L \Rightarrow m_{a,K}$ separabel.

$m_{a,K} = \prod_{i=1}^n (K - a_i)$ mit $a_i \in \bar{L} \Rightarrow$ Jedes a_i ist separabel über K .

\Rightarrow Zerfallskörper $K(a_1, \dots, a_n)/K$ separabel.

Normalisiere \dots ged.