Erinnerung: Wir betrachten Polynome in $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ über einem beliebigen Ring R.

7.3.6 Definition: Ein Polynom $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ heisst *symmetrisch*, wenn gilt

$$\forall \sigma \in S_n\colon\ f(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma n}) = f(X_1, \ldots, X_n).$$

7.3.7 Definition: Für jedes $1 \leqslant m \leqslant n$ ist das *m-te elementarsymmetrische Polynom in $X_1, \ldots, X_n$* das homogene symmetrische Polynom vom Grad m

$$\boxed{S_m := \sum_{1 \leqslant \nu_1 < \ldots < \nu_m \leqslant n} X_{\nu_1} \cdots X_{\nu_m}} \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n].$$

7.3.10 Beispiel: Für jedes $d \geqslant 1$ ist $\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^d$ ein symmetrisches Polynom. Zum Beispiel sind

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu &=& S_1, \\ \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^2 &=& S_1^2 - 2S_2, \\ \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu^3 &=& S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3. \end{array}}$$

7.3.12 Variante: Sei K ein Körper. Eine rationale Funktion $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$ heisst *symmetrisch*, wenn gilt

$$\forall \sigma \in S_n\colon\ f(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma n}) = f(X_1, \ldots, X_n).$$

7.3.13 Satz: Für jede symmetrische rationale Funktion $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$ existiert eine eindeutige rationale Funktion $g \in K(U_1, \ldots, U_n)$ mit $f = g(S_1, \ldots, S_n)$.

7.3.15 Beispiel: Es sind

$$\frac{S_{n-1}}{S_n} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} X_1 \cdots \widehat{X_\nu} \cdots X_n}{X_1 \cdots X_n} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{X_\nu}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^n X_\nu^{-1} &= \frac{S_{n-1}}{S_n}, \\
\sum_{\nu=1}^n X_\nu^{-2} &= \frac{S_{n-1}^2 - 2S_{n-2}S_n}{S_n^2}, \\
\sum_{\nu=1}^n X_\nu^{-3} &= \frac{S_{n-1}^3 - 3S_{n-1}S_{n-2}S_n + 3S_{n-3}S_n^2}{S_n^3}.
\end{aligned}$$

$S_0 := 1.$

$$\prod_{\nu=1}^{n} (X + X_\nu) = \sum_{d=0}^{n} X^{n-d} \cdot S_d$$

$$\Rightarrow \sum_{d=0}^{n} X^{n-d} S_d\left(\frac{1}{X_1}, \ldots, \frac{1}{X_n}\right) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(X + \frac{1}{X_\nu}\right) = \frac{X^n}{X_1 \cdots X_n} \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \left(X_\nu + \frac{1}{X}\right) = \frac{X^n}{S_n} \cdot \sum_{d=0}^{n} X^{d-n} S_d$$

$$= \sum_{d=0}^{n} X^{d} \frac{S_d}{S_n}$$

$$\Rightarrow S_d\left(\frac{1}{X_1}, \ldots, \frac{1}{X_n}\right) = \frac{S_{n-d}}{S_n}.$$

Erinnerung:

7.3.1 Definition: Ein Polynom der Form $f(\underline{X}) = \sum_{\underline{i}}' a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}}$, bei der die Summe sich nur über Multiindizes $\underline{i}$ mit $\sum_\nu i_\nu = d$ erstreckt, heisst *homogen vom Grad d*.

7.3.5 Variante: Für jede Variable X_ν sei ein Gewicht $\mu_\nu \in \mathbb{R}$ gegeben. Ein Polynom der Form $f(\underline{X}) = \sum_{\underline{i}}' a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}}$, bei der die Summe sich nur über Multiindizes $\underline{i}$ mit $\sum_\nu i_\nu \mu_\nu = \lambda$ erstreckt, heisst dann *isobar vom Gewicht* λ. Jedes Polynom ist eine eindeutige Summe $f = \sum_\lambda' f_\lambda$ mit f_λ isobar vom Gewicht λ.

Betrachte nun weitere Variablen $U_1, \ldots, U_n$.

7.3.8 Hauptsatz: Für jedes symmetrische Polynom $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ existiert ein eindeutiges Polynom $g \in R[U_1, \ldots, U_n]$ mit $f = g(S_1, \ldots, S_n)$.

7.3.9 Zusatz: Ist f symmetrisch und homogen vom Grad d, so ist g isobar vom Gewicht d, wobei jedes U_ν mit dem Gewicht ν versehen wird.

Bew.: g_d isobar vom Gewicht $d \Rightarrow g_d(S_1, \ldots, S_n)$ homogen vom Grad d.

Allg.: $g = \sum_d g_d \Rightarrow g(S_1, \ldots, S_n) = \sum_d \overbrace{g_d(S_1, \ldots, S_n)}^{u}$ qed.

Bem. zu 7.3.8: Genügt für f homogen vom Grad d = fest.

$$\Phi_d : \underbrace{R[\underline{U}]_{\text{isobar vom Gewicht } d}}_{V} \longrightarrow \underbrace{R[\underline{X}]^{\text{symmetrisch}}_{\text{homogen vom Grad } d}}_{W}, \quad g \mapsto g(S_1, \ldots, S_n)$$

Zu zeigen: Φ_d ist bijektiv.

Wir ordnen die Monome $X^{\underline{i}} = X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$ umgekehrt lexikographisch:

$$\underline{i} > \underline{j} :\Longleftrightarrow \exists\, 1\le \mu \le n : \left\{ \begin{array}{l} \forall\, \nu > \mu : \ i_\nu = j_\nu \\ \text{und} \quad i_\mu > j_\mu . \end{array} \right\} \qquad \begin{array}{c} (1\,5\,4\,2\,2) \\ \vee \\ (5\,3\,1\,2\,2) \end{array}$$

→ Totalordnung auf $(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$

<u>Lemma</u>: $\boxed{\text{Der höchste Term in } s_1^{i_1}\cdots s_n^{i_n} \text{ ist } X_1^{i_1+\dots+i_n}\cdot X_2^{i_2+\dots+i_n}\cdots X_n^{i_n}.}$

<u>Surjektivität</u> von Φ_d: Sei $0\neq f\in W$ mit $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} X^{\underline{i}}$ und $\underline{j} := \min\{\underline{i} \mid a_{\underline{i}} \neq 0\}$.

f symmetrisch, $\underline{j}$ minimal $\Rightarrow j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n$.

$\Rightarrow \exists\, \underline{i} : \ j_1 = i_1+\dots+i_n, \ \dots, \ j_n = i_n$.

$\Rightarrow f - a_{\underline{j}} \cdot s_1^{i_1}\cdots s_n^{i_n}$ enthält das Monom $X^{\underline{j}}$ nicht!

$\Rightarrow$ enthält nur noch Monome $X^{\underline{k}}$ mit $\underline{k} > \underline{i}$.

$\{\underline{i}\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n \mid \sum \underline{i} = d\}$ endlich $\Longrightarrow$ fertig durch Induktion.

<u>Injektivität</u>: Zu zeigen: $\ker(\Phi_d) = 0$. Sei also $0\neq g \in \ker(\Phi_d)$.

$g = \sum_{\underline{i}} b_{\underline{i}} u^{\underline{i}}$. Setze $\underline{j} := \min\{\underline{i} \mid b_{\underline{i}} \neq 0\}$. Für jedes $\underline{i} > \underline{j}$ ist dann

$$(i_1+\dots+i_n, i_2+\dots+i_n, \dots, i_n) > \underbrace{(j_1+\dots+j_n, \dots, j_n)}_{\leq}$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\parallel}{0}}{a(s_1, \dots, s_n)} = \underbrace{\sum_{\underline{i} \neq \underline{j}} b_{\underline{i}} \, s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n}}_{\text{alle Exponenten} > \underline{k}} + b_{\underline{j}} \cdot \underbrace{s_1^{j_1} \cdots s_n^{j_n}}_{\overset{\parallel}{\underline{X}^{\underline{k}} + \text{Terme mit Exp. a.} > \underline{k}}}$$

$$= b_{\underline{j}} \cdot \underline{X}^{\underline{k}} + \text{größere Terme.}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch!

qed.