

Lösungen zu Serie 1

Hinweise: Mit einem Stern (*) gekennzeichnete Aufgaben sind schwierig und zum Knobeln gedacht.

1. Sei X eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass die kofinite Topologie

$$\mathcal{O}_{\text{cofin}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$

eine Topologie von X ist.

Lösung:

Offensichtlich sind \emptyset und X in $\mathcal{O}_{\text{cofin}}$ enthalten.

Seien nun $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_{\text{cofin}}$. Falls $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$ ist, so ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \mathcal{O}_{\text{cofin}}$. Sei also $U_1 \neq \emptyset \neq U_2$. Dann gilt nach den De Morganschen Gesetzen, dass

$$X \setminus (U_1 \cap U_2) = (U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$$

als Vereinigung zweier endlicher Mengen ebenfalls endlich ist. Also ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}_{\text{cofin}}$.

Sei nun $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_{\text{cofin}}$ beliebig. Wir behaupten, dass $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \in \mathcal{O}_{\text{cofin}}$ gilt. Falls die Kardinalität von \mathcal{S} kleiner als 2 ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $|\mathcal{S}| \geq 2$. Dann gibt es ein $U_0 \neq \emptyset$ in \mathcal{S} . Folglich ist

$$X \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U \subseteq X \setminus U_0$$

endlich und somit ist $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$ in $\mathcal{O}_{\text{cofin}}$ enthalten.

(b) Für welche Mengen X bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

Lösung:

Dies ist nur der Fall für endliche Mengen X .

2. (a) Sei $X = \{a, b, c, d\}$ eine Menge bestehend aus vier paarweise verschiedenen Elementen. Welche der folgenden Mengen sind Topologien für X ?

(i) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$

(ii) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}\}$

(iii) $\{\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

Lösung:

Man kann leicht überprüfen, dass die Menge in (i) eine Topologie für X bildet, die Mengen in (ii) und (iii) hingegen nicht. In (ii) ist zum Beispiel $\{a\} \cup \{b, d\} = \{a, b, d\}$ keine Teilmenge der angegebenen Menge, in (iii) ist zum Beispiel $\{a, c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c, d\}$ keine Teilmenge der angegebenen Menge.

(b) Seien a, b und c paarweise verschieden. Geben Sie jeweils alle Topologien auf X an, wobei

(i) $X = \{a\}$,

(ii) $X = \{a, b\}$,

(iii) $X = \{a, b, c\}$.

Lösung:

Hinweis: In (i) gibt es nur die triviale Topologie, in (ii) gibt es vier Topologien, in (iii) sind es 29. Die 29 Topologien für eine dreielementige Menge werden auf der folgenden Website bildlich veranschaulicht:

<https://satprepget800.com/2019/05/01/the-29-topologies-on-a-3-element-set/>

- (c) Sei X eine endliche Menge. Beschreiben Sie alle Topologien auf X , die von einer Metrik induziert werden.

Lösung:

Auf einer endlichen Menge wird nur die diskrete Topologie von einer Metrik induziert.

3. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Menge.

- (a) Zeigen Sie, dass das Innere $\overset{\circ}{A}$ die größte in A enthaltene offene Menge ist, d.h. $\overset{\circ}{A}$ ist offen und für jede offene Menge $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq \overset{\circ}{A}$.

Lösung:

Für jeden Punkt $x \in \overset{\circ}{A}$ gibt es per Definition des Inneren eine offene Menge V_x mit $x \in V_x \subseteq A$. Wir können also $\overset{\circ}{A}$ schreiben als die Vereinigung aller solchen V_x für $x \in \overset{\circ}{A}$. (Überprüfen Sie das.)

Dies ist eine Vereinigung von offenen Mengen, also eine offene Menge; somit ist $\overset{\circ}{A}$ offen.

Sei nun $B \subseteq A$ eine offene Menge und sei $x \in B$. Dann ist per Definition B eine offene Umgebung von x , also $x \in \overset{\circ}{A}$.

- (b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Hülle \overline{A} von A die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. \overline{A} ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge B mit $B \supseteq A$ gilt $B \supseteq \overline{A}$.

4. (Alternative Definition einer Topologie) Sei X eine Menge und es bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X . Eine Abbildung $\overline{}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ erfüllt die *Kuratowskischen Hüllenaxiome*, falls gilt

$$H_1: \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

$$H_2: A \subset \overline{A} \text{ für alle } A \subseteq X,$$

$$H_3: \overline{\overline{A}} = \overline{A} \text{ für alle } A \subseteq X,$$

$$H_4: \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \text{ für alle } A, B \subseteq X.$$

- (a) Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass dann „Abschluss bilden“ die Kuratowskischen Hüllenaxiome erfüllt.

Lösung:

Wir zeigen beispielhaft, dass „Abschluss bilden“ die Eigenschaft H3 erfüllt. Sei dazu $A \subseteq X$. Weil \overline{A} laut Aufgabe 3 (b) eine abgeschlossene Menge ist, folgt aus derselben Aufgabe wegen $\overline{A} \supseteq A$, dass $\overline{A} \supseteq \overline{\overline{A}}$ gilt. Mit H2 folgt also $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$.

- (b) Es sei eine Abbildung $\overline{}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ gegeben, welche die Kuratowskischen Hüllenaxiome erfüllt. Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf X gibt, sodass $\overline{}$ gerade dem „Abschluss bilden“ bezüglich dieser Topologie entspricht.

Lösung:

Skizze: Die Topologie kann wie folgt definiert werden: Ein Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{A} = A$ gilt. Man zeige erstmal, dass dies in der Tat eine Topologie definiert. Dann sollte bewiesen werden, dass $\overline{}$ gerade dem „Abschluss bilden“ bezüglich dieser Topologie entspricht. (Man zeige zum Beispiel, dass für alle $A \subseteq X$, \overline{A} die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält.) Es bleibt noch Eindeutigkeit zu zeigen. Sei \mathcal{O} eine Topologie für welche \overline{A} die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält. Man zeige, dass eine Menge $A \subseteq X$ bzgl \mathcal{O} abgeschlossen ist genau dann wenn $\overline{A} = A$.

5. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum.

- (a) Zeigen Sie, dass die Topologie $\mathcal{O}(d_X)$ des metrischen Raumes (X, d_X) eine Topologie ist.
 (b) Zeigen Sie, dass die „offene Kugel“ $\{x \mid d_X(x, x_0) < \epsilon\}$ für jedes $\epsilon > 0$ und für alle $x_0 \in X$ offen ist.

Sei nun (Y, d_Y) ein weiterer metrischer Raum und sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir betrachten X und Y mit den zugehörigen Topologien $\mathcal{O}(d_X)$ und $\mathcal{O}(d_Y)$.

- (c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ gilt: f ist stetig¹ in x genau dann, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert, so dass $f(U) \subseteq V$.
- (d) Zeigen Sie, dass f stetig² ist genau dann, wenn für alle offenen Mengen $V \subseteq Y$ gilt, dass die Menge $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist.

Lösung:

Vergleich Proposition 10.24 in <https://people.math.ethz.ch/~einsiedl/Analysis-Skript.pdf>.

6. (a) Zeigen Sie, dass es keine stetige³ Bijektion von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} gibt.
- (b) Zeigen Sie, dass es eine stetige Bijektion von \mathbb{Q}^2 nach \mathbb{Q} gibt, deren Umkehrabbildung stetig ist. (*)

¹Benutzen Sie die aus der Analysis 1 – Vorlesung übliche $\epsilon - \delta$ – Definition der Stetigkeit.

²Benutzen Sie wiederum die $\epsilon - \delta$ – Definition der Stetigkeit.

³Benutzen Sie wiederum die $\epsilon - \delta$ – Definition der Stetigkeit.