Lösungen zu Serie 10

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.

   Lösung:

   Sei X ein topologischer Raum, der das das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ von X für eine abzählbare Menge I. Für alle $i \in I$ wählen wir ein $x_i \in B_i$ und definieren $A = \bigcup_{i\in I} x_i$. Die Menge A ist nach Konstruktion abzählbar und wir behaupten, dass $\overline{A} = X$ gilt. Angenommen, es gibt ein $x \in X \setminus \overline{A}$. Weil $\overline{A}$ abgeschlossen ist (vgl. Aufgabe 3 von Serie 1), ist $X \setminus \overline{A}$ offen. Also gibt es eine offene Menge U in X mit $x \in U \subseteq X \setminus \overline{A}$. Weil $\mathcal{B}$ eine Basis von X ist, gibt es nun ein $i \in I$ mit $x \in B_i \subseteq U$. Für das zu Beginn ausgewählte Element $x_i \in B_i$ gilt nun aber $x_i \in A \subseteq \overline{A}$, also $x_i \in \overline{A}$, im Widerspruch zu $x_i \in B_i \subseteq U \subseteq X \setminus \overline{A}$. Also gilt $\overline{A} = X$ wie behauptet.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

   Lösung:

   Wir wählen einen Punkt aus $\mathbb{R}$, sagen wir 0, und nehmen an, dass es eine abzählbare Umgebungsbasis $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ von 0 gibt. Wir können annehmen, dass U_k für alle $k \in \mathbb{N}$ von der Form $\mathbb{R} \setminus F_k$ für eine endliche Menge $F_k \subseteq \mathbb{R}$ ist. Dann ist $F := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ eine abzählbare Vereinigung von endlichen Mengen, also abzählbar. Da $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, gibt es einen Punkt $x \in \mathbb{R}$ (in der Tat überabzählbar viele), der nicht in F enthalten ist. Somit ist $U = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ eine offene Menge, die wegen $x \in U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ keine der Mengen U_k enthält. Nun widerspricht dies wegen $0 \in U$ aber der Tatsache, dass $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Umgebungsbasis von 0 ist.

3. Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Zeigen Sie, dass dann $\prod\limits_{j\in J} X_j$ ein Hausdorffraum ist.

   Lösung:

   Seien $x = \{x_j\}_{j\in J}$ und $y = \{y_j\}_{j\in J}$ zwei verschiedene Punkte von $X = \prod_{j\in J} X_j$. Insbesondere gibt es eine Koordinate $j \in J$, so dass $x_j \neq y_j$. Wir können also disjunkte offene Teilmengen U_j und V_j von X_j finden, so dass $x_j \in U_j$ und $y_j \in V_j$. Wir definieren $U := \prod_{j\in J} \tilde{U}_i$ und $V := \prod_{j\in J} \tilde{V}_i$, wobei $\tilde{U}_i = \tilde{V}_i = X_i$, falls $i \neq j$ und $\tilde{U}_j = U_j$, $\tilde{V}_j = V_j$. Dann sind U und V disjunkte offene Teilmengen von X mit $x \in U$ und $y \in V$, was beweist, dass X ein Hausdorffraum ist.

4. Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von topologischen Räumen und $X = \prod\limits_{j\in J} X_j$.

   (a) Zeigen Sie, dass X die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $\{f_j : Y \to X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von stetigen Abbildungen, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \to X$ mit $\pi_j \circ f = f_j$ für alle $j \in J$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie τ die gröbste Topologie auf X ist, für welche die Projektionen $\pi_k : X \to X_k$, $k \in J$, alle stetig sind, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X, für die die Projektionen alle stetig sind, so gilt $\tau \subseteq \mathcal{O}$.

Lösung:

(a) Die Abbildung muss durch $f: Y \to X$, $y \mapsto \{f_j(y)\}_{j\in J}$ gegeben sein. Für die Stetigkeit kann zum Beispiel Aufgabe 1 (c) von Serie 2 verwendet werden: Die Menge

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_j^{-1}(U) \mid U \subseteq X_j \text{ offen, } j \in J\right\}$$

bildet eine Subbasis der Produkttopologie von X und es genügt zu zeigen, dass $f^{-1}\left(\pi_j^{-1}(U)\right) \subseteq Y$ offen ist für alle offenen Mengen $U \subseteq X_j$, $j \in J$. Es gilbt aber $f^{-1}\left(\pi_j^{-1}(U)\right) = f_j^{-1}(U)$, also wegen der Stetigkeit der f_j für $j \in J$ die Behauptung.

(b) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie von X, für die die Projektionen alle stetig sind. Dann muss

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_j^{-1}(U) \mid U \subseteq X_j \text{ offen, } j \in J\right\} \subseteq \mathcal{O}$$

gelten. Weil $\mathcal{S}$ aber eine Subbasis von τ ist, folgt $\tau \subseteq \mathcal{O}$ aus (dem zweiten Teil von) Aufgabe 5 von Serie 2: τ ist die eindeutige Topologie auf X, sodass $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ ist, und dies ist die kleinste bzw. gröbste Topologie von X, die $\mathcal{S}$ enthält.

5. Sei $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\}$ versehen mit der Topologie

$$\begin{aligned}\mathcal{O} = &\left\{U \in \mathcal{O}_\mathbb{R} \mid 0 \notin U\right\} \cup \left\{ (U \setminus \{0\}) \cup \{0_1\} \mid U \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, 0 \in U\right\} \\ &\cup \left\{ (U \setminus \{0\}) \cup \{0_2\} \mid U \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, 0 \in U\right\} \cup \left\{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\} \mid U \in \mathcal{O}_\mathbb{R}, 0 \in U\right\}.\end{aligned}$$

Intuitiv ist X die reelle Gerade, wobei der Ursprung 0 durch zwei verschiedene Punkte 0_1 und 0_2 ersetzt wurde. Zeigen Sie, dass X kein Hausdorffraum ist, aber folgendes gilt: X erfüllt das 2. AA und jeder Punkt in X hat eine Umgebung welche homeomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Sie habe damit gezeigt, dass X zwei der drei Mannigfaltigkeitsaxiome erfüllt.

Lösung:

Wir beweisen zuerst, dass X kein Hausdorffraum ist. Wir betrachten die Punkte 0_1 und 0_2. Wir nehmen widerspruchsweise an, es seien U_1 und U_2 disjunkte offene Mengen mit $0_1 \in U_1$ und $0_2 \in U_2$. Nach Definition von $\mathcal{O}$ enthält U_1 ein in $\mathbb{R}$ offenes Intervall ohne 0, d.h. es gibt ein $\epsilon_1 > 0$ so, dass

$$\big((-\epsilon_1, \epsilon_1) \setminus \{0\}\big) \subset U_1.$$

Analog, gibt es ein $\epsilon_2 > 0$ so, dass

$$\big((-\epsilon_2, \epsilon_2) \setminus \{0\}\big) \subset U_2.$$

Somit sind U_1 und U_2 nicht disjunkt.

Da $\mathbb{R}$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, gibt es eine abzählbare Basis $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_\mathbb{R})$. Die Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = &\left\{U \in \mathcal{B}_\mathbb{R} \mid 0 \notin U\right\} \cup \left\{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_1\} \mid U \in \mathcal{B}_\mathbb{R}, 0 \in U\right\} \\ &\left\{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_2\} \mid U \in \mathcal{B}_\mathbb{R}, 0 \in U\right\} \cup \left\{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\} \mid U \in \mathcal{B}_\mathbb{R}, 0 \in U\right\}\end{aligned}$$

ist dann eine abzählbare Basis von $(X, \mathcal{O})$ und X erfüllt somit das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Es bleibt zu zeigen, dass X lokal euklidisch ist. Für alle Punkte in $X \setminus \{0_1, 0_2\}$ ist dies offensichtlich. Weiter ist $\big((-1,1) \setminus \{0\}\big) \cup \{0_1\}$ eine offene Umgebung von 0_1 in X, die homöomorph zu $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist, und $\big((-1,1) \setminus \{0\}\big) \cup \{0_2\}$ eine offene Umgebung von 0_2, die homöomorph zu $(-1,1) \subseteq \mathbb{R}$ ist. Damit ist alles gezeigt.

6. Sei X ein topologischer Raum, J eine Menge und $X^J = \{\varphi \mid \varphi\colon J \to X\}$ trage die Produkttopologie. Sei weiter $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ eine Folge in X^J und sei $\varphi \in X^J$. Zeigen Sie: φ ist Grenzwert der Folge $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ in X^J genau dann, wenn $\varphi(j)$ Grenzwert der Folge $(\varphi_n(j))_{n=1}^\infty$ ist für alle $j \in J$.

Lösung:

Die Abbildung $\pi_j : \varphi \mapsto \varphi(j)$ ist stetig, deshalb auch folgenstetig, sodass $\varphi_n(j) \to \varphi(j)$ falls $\varphi_n \to \varphi$.

Angenommen, $\varphi_n(j) \to \varphi(j)$ für jedes $j \in J$. Also existiert für jede Umgebung U_j von $\varphi(j)$ ein $n(U_j)$ sodass $\varphi_n(j) \in U_j$ falls $n \geq n(U_j)$. Sei U eine Umgebung von φ: per Definition der Produkttopologie, gibt es eine endliche Menge $I \subset J$ und offene Mengen $V_j \subset X_j$, mit $V_j = X_j$ falls $j \notin I$, und $\varphi \in \prod V_j \subset U$. Wir wählen $n(U) := \max\{n(V_j) : j \in I\}$. Da I endlich ist, ist auch $n(U)$ endlich. Dann gilt $\varphi_n(j) \in V_j$ für jedes $j \in J$, falls $n \geq n(U)$, und darum $\varphi_n \in U$ falls $n \geq n(U)$. Dies zeigt, dass $\varphi_n \to \varphi$.

7. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f\colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte“ wie z.B. die „Ecke“ $\{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten“ wie $\{0.5\}_{n\in\mathbb{N}}$. $(*)$