Lösungen zu Serie 11

1. Zeigen Sie, dass das Urysohnsche Lemma aus dem Tietzeschen Erweiterungslemma folgt.

   Lösung:

   Wir nehmen an, dass das Tietzesche Erweiterungslemma gilt und folgern daraus das Urysohnsche Lemma. Sei X ein normaler topologischer Raum und seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Wir definieren die Funktion $f\colon A \cup B \to [0,1]$ durch

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in A, \\ 1, & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

   Dieses f ist offensichtlich stetig (bezüglich der Teilraumtopologie auf $A \cup B$), denn $A, B \subseteq A \cup B$ sind beide offen und abgeschlossen. Somit existiert nach dem Tietzeschen Erweiterungslemma eine stetige Funktion $g\colon X \to [0,1]$ so, dass $g|_{A\cup B} = f$. Dieses g ist nun gerade die gesuchte Funktion aus dem Urysohnschen Lemma, welche auf A konstant 1 und auf B konstant 0 ist.

2. Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum mit mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.

   Lösung:

   Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum und seien $x, y \in X$ zwei verschiedene Punkte. Dann sind die Mengen $\{x\}$ und $\{y\}$ (vgl. Vorlesung aus Woche 3) abgeschlossen. Nach dem Urysohnschen Lemma gibt es eine stetige Abbildung $f\colon X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Wir zeigen, dass f surjektiv ist. Die Behauptung folgt dann aus der Überabzählbarkeit von $[0,1]$, denn die Niveaumengen $f^{-1}(\{t\})$, $t \in [0,1]$, sind disjunkt und es gibt überabzählbar viele von ihnen. Wir zeigen die Kontraposition, d.h. dass aus f nicht surjektiv folgt, dass X nicht zusammenhängend ist. Falls f nicht surjektiv ist und $s \in [0,1]$ nicht im Bild von f ist, so sind die Urbilder $f^{-1}\big([0,s)\big)$ und $f^{-1}\big((s,1]\big)$ offen, disjunkt und nicht leer (da $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$). Somit ist X nicht zusammenhängend, im Widerspruch zur Annahme.

3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Ein Unterraum eines T_3-Raums ist wieder ein T_3-Raum.

   (b) Ein abgeschlossener Unterraum eines T_4-Raums ist wieder ein T_4-Raum.

   Lösung:

   Sei X ein topologischer Raum und $X_0 \subseteq X$ eine Teilmenge, betrachtet mit der Unterraumtopologie. Zu zeigen ist: Falls X ein T_j-Raum ist, so ist auch X_0 ein T_j-Raum, wobei $j \in \{3,4\}$. Es ist leicht einzusehen, dass Teilräume von T_2-Räumen (also Hausdorffräumen) wieder T_2-Räume sind bezüglich der Teilraumtopologie (vgl. Vorlesung in Woche 3). Die Aussage für $j = 3$ folgt somit aus den Definitionen und der Tatsache, dass die abgeschlossenen Mengen im Unterraum X_0 Schnitte von X mit in X abgeschlossenen Mengen sind. Weiter folgt die Aussage für $j = 4$ aus den Definitionen und der Tatsache, dass die abgeschlossenen Mengen im abgeschlossenen Unterraum X_0 auch abgeschlossen in X sind.

4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) X ist ein T_4-Raum genau dann, wenn X normal und ein T_1-Raum ist.

Lösung:

Per Definition ist X ein T_4-Raum genau dann, wenn X normal und ein T_2-Raum ist. Gemäß Vorlesung (siehe Woche 3) sind in einem T_2-Raum die einelementigen Mengen abgeschlossen und nach Aufgabe 3 (c) von Serie 3 ist ein topologischer Raum ein T_1-Raum genau dann, wenn die einelementigen Mengen abgeschlossen sind. Es genügt also zu zeigen, dass ein normaler Raum X, in dem die einelementigen Mengen abgeschlossen sind, auch ein T_2-Raum ist. Seien dazu $x, y \in X$. Dann sind nach Annahme $\{x\}, \{y\}$ abgeschlossen und es gibt (weil X normal ist) offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $\{x\} \subseteq U, \{y\} \subseteq V$. Also sind U, V disjunkte offene Umgebungen von x bzw. y und X ist damit ein T_2-Raum.

(b) Falls X ein kompakter T_2-Raum ist, dann ist X normal (also insbesondere ein T_4-Raum).

Lösung:

Dies wird in Jänich gezeigt (vgl. Bemerkung auf S. 135).

5. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta \colon X \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} |d(x, y)|$$

stetig ist und dass $\delta(x) > 0$ für alle $x \notin A$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?

Lösung:

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass

$$\begin{aligned}\delta(x) = \inf_{z \in A} d(x, z) \leq \inf_{z \in A} \big(d(x, y) + d(y, z)\big) = d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z)\\ = d(x, y) + \delta(y).\end{aligned}$$

Somit ist $\delta(x) - \delta(y) \leq d(x, y)$. Analog gilt (vertauschen von x und y), dass $\delta(y) - \delta(x) \leq d(x, y)$. Damit ist

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq d(x, y),$$

d.h. δ ist 1-Lipschitz stetig (und insbesondere stetig). Beachten Sie, dass wir dazu nicht benötigt haben, dass A abgeschlossen ist.

Sei nun $x \notin A$. Da A abgeschlossen ist, ist $X \setminus A$ offen und somit gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \in X \setminus A$. Folglich gilt für alle $y \in A$, $d(x, y) \geq \epsilon$, womit $\delta(x) \geq \epsilon > 0$ gezeigt ist.

Falls A nicht abgeschlossen ist, muss für $x \notin A$ nicht zwingend $\delta(x) > 0$ gelten. Sei zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ und $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist $\delta(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie das Urysohnsche Lemma für den metrischen Raum X ohne auf die Sätze oder Ideen der Vorlesungen aus der Woche 11 zu verweisen.

Lösung:

Seien $A, B \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann ist die Funktion $f \colon X \to [0, 1]$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

wohldefiniert und stetig ist und es gilt $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ und $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

6. Zeigen Sie, dass das Möbiusband nicht zum Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ homöomorph ist. $(*)$