D-MATH Topologie FS 2023
Peter Feller ETH Zürich

Lösungen zu Serie 12

1. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Die Abbildung π ist ein lokaler Homöomorphismus.
   (b) Falls $\pi^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ einelementig ist, dann ist π ein Homöomorphismus.

   Lösung:

   Wir zeigen zunächst (a). Zu zeigen ist, dass für jeden Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung V von y existiert, sodass $\pi(V) \subseteq X$ offen und $\pi|_V\colon V \to \pi(V)$ ein Homöomorphismus ist. Sei $y \in Y$ und $x := \pi(y)$.

   Variante 1 (mit der Definition):

   Es existiert eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung U von x mit Blättern U_j für $j \in J$ und einer Indexmenge J. Wegen $y \in \pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup}_{j\in J} U_j$ gibt es genau ein $j \in J$ mit $y \in U_j$. Nach Definition ist $\pi^U_{U_j} = \pi|_{U_j}\colon U_j \to U$ ein Homöomorphismus, d.h. wir können $V = U_j$ setzen.

   Variante 2 (unter benutzung der alternativen Definition als lokal triviale Faserung mit diskreter Faser):

   Es existiert eine Umgebung U von $x = \pi(y)$, einen topologischen Raum F und einen Homöomorphismus $h\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

   kommutiert, wobei $pr_1\colon U \times F \to U$, $(x, f) \to x$ die Projektion auf die erste Koordinate bezeichnet. Wie in Aufgabe 4 (a) sieht man, dass $\pi^{-1}(x) \cong \{x\} \times F \cong F$ gilt. Nun ist F diskret, deswegen ist $\{f\} \subseteq F$ offen für alle $f \in F$, also $U \times \{f\} \subseteq U \times F$ offen für alle $f \in F$. Weil h ein Homöomorphismus (also stetig) ist, ist also auch $V := h^{-1}(U \times \{f\}) \subseteq \pi^{-1}(U)$ offen und damit auch V offen als Teilmenge von Y. Weiter ist

$$\pi(V) = (pr_1 \circ h)(V) = pr_1(U \times \{f\}) = U \subseteq X$$

   offen und es bleibt zu zeigen, dass $\pi|_V\colon V \to \pi(V)$ ein Homöomorphismus ist. Dies folgt daraus, dass $pr_1|_{U\times\{f\}}\colon U \times \{f\} \to U$ und $h|_V\colon V \to U \times \{f\}$ Homöomorphismen sind. Also ist π ein lokaler Homöomorphismus.

   Teil (b) folgt direkt aus Teil (a), denn ein bijektiver lokaler Homöomorphismus ist auch ein (globaler) Homöomorphismus.

2. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung, $A \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und $\tilde{A} := \pi^{-1}(A)$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $\pi|_{\tilde{A}}\colon \tilde{A} \to A$ eine Überlagerung ist.

   Lösung:

   Variante 1 (unter benutzung der alternativen Definition als lokal triviale Faserung mit diskreter Faser):

   Wir bemerken zunächst, dass die Einschränkung $\pi|_{\tilde{A}}\colon \tilde{A} \to A$ stetig (vgl. Serie 2, Aufgabe 1 (b)) und surjektiv (per Definition von $\tilde{A}$ ist. Die Fasern $\left(\pi|_{\tilde{A}}\right)^{-1}(x)$ sind für alle $x \in A$ diskret in Y, also auch in $\tilde{A}$; dies folgt leicht aus der Defintion der Teilraumtopologie.

Es bleibt zu zeigen, dass $\pi|_{\tilde{A}}$ eine lokal triviale Faserung ist. Sei dazu $x \in A$. Weil π eine Überlagerung ist, gibt es eine Umgebung U von x in X, einen topologischen Raum F und einen Homöomorphismus $h\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $pr_1\colon U \times F \to U$, $(x,f) \to x$ die Projektion auf die erste Koordinate bezeichnet. Wir definieren $U^A := U \cap A$. Dann gilt wegen $U^A \subseteq A$ auch

$$\pi|_{\tilde{A}}\left(\underbrace{\pi^{-1}\left(U^A\right)}_{\subseteq \tilde{A}}\right) = \pi\left(\pi^{-1}\left(U^A\right)\right) = U^A.$$

Wir behaupten, dass $h\left(\pi^{-1}\left(U^A\right)\right) = U^A \times F$ gilt. Zusammen mit der Kommutativität des obigen Diagramms folgt dann, dass $h|_{\pi^{-1}(U^A)}\colon \pi^{-1}\left(U^A\right) \to U^A \times F$ ein Homoöomorphismus ist und dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}\left(U^A\right) \arrow[rr, "h|_{\pi^{-1}(U^A)}"] \arrow[dr, "\pi|_{\tilde{A}}"'] & & U^A \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U^A & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies impliziert dann, dass $\pi|_{\tilde{A}}$ eine lokal triviale Faserung ist.
Sei $v \in h\left(\pi^{-1}\left(U^A\right)\right)$. Dann gibt es ein $z \in \pi^{-1}\left(U^A\right)$ mit $h(z) = v$ und es gilt (wegen der Kommutativität des Diagramms oben) $pr_1(v) = pr_1(h(z)) = \pi(z) \in U^A$. Also ist $v \in pr_1^{-1}\left(U^A\right) = U^A \times F$. Andersherum sei $v \in U^A \times F \subseteq U \times F$. Weil h ein Homöomorphismus (also bijektiv) ist, gibt es also ein $z \in \pi^{-1}(U)$ mit $h(z) = v$. Es gilt also $\pi(z) = pr_1(h(z)) = pr_1(v) \in U^A$, also $z \in \pi^{-1}\left(U^A\right)$ und $v = h(z) \in h\left(\pi^{-1}\left(U^A\right)\right)$.

<u>Variante 2</u> (mit der Definition):

Sei $x \in A$. Weil $\pi : Y \to X$ eine Überlagerung ist, es existiert eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung U von x in X. Das heisst: $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} V_i$, wobei die V_i offene disjunkte Mengen sind, und $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jede $i \in I$.

Wir zeigen, dass $U^A := U \cap A$ eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung U von x in A ist (für die Abbildung $\pi|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \to A$). Wir bemerken zuerst, dass

$$(\pi|_{\tilde{A}})^{-1}(U^A) = \pi^{-1}(U^A) = \bigcup_{i\in I} V_i^A,$$

wobei $V_i^A := V_i \cap \tilde{A}$ sind offene disjunkte Mengen in $\tilde{A}$. Weil $\pi|_{V_i^A} : V_i^A \to \pi(V_i^A) = U^A$ die Einschränkung des Homöomorphismus $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ ist, ist $\pi|_{V_i^A}$ auch ein Homöomorphismus.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\pi_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$, eine Überlagerung ist.

   Lösung:

   Die n-ten Einheitswurzeln, also die Lösungen von $z^n = 1$, sind $\xi_k := e^{2\pi i k/n} = \cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$

für $k = 1, \ldots, n$. Wir schreiben $w \in \mathbb{C}^*$ als $w = re^{i\theta}$ für $r > 0$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Dann gilt

$$\pi_n^{-1}(w) = \left\{ r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_1, \ldots, r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_n \right\}.$$

Die Fasern von π_n sind also endlich (mit Kardinalität n), insbesondere diskret. Weiter ist klar, dass π_n stetig und surjektiv ist. Es bleibt zu zeigen, dass π_n eine lokal triviale Faserung ist.

Sei nun $w = r_0 e^{i\theta_0} \in \mathbb{C}^*$. Dann ist die Menge $U := \left\{ re^{i\theta} \mid r > 0,\, |\theta - \theta_0| < \pi/2 \right\} \subseteq \mathbb{C}^*$ eine offene Umgebung von w. Gemäß obiger Überlegung erhalten wir $\pi_n^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^n V_k$, wobei

$$V_k := \left\{ r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_k \mid |\theta - \theta_0| < \pi/2 \right\}.$$

Wir bemerken zunächst, dass $V_k \cap V_h = \emptyset$ für alle $k \neq h$ gilt: Angenommen, $r^{1/n} e^{i\theta/n} \xi_k = r^{1/n} e^{i\theta'/n} \xi_h$ für $\theta, \theta' \in (\theta_0 - \pi/2, \theta_0 + \pi/2)$ und $k \neq h$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \equiv \frac{\theta'}{n} + \frac{2\pi h}{n} \pmod{2\pi} \\ \iff\ &\theta - \theta' \equiv 2\pi(h - k) \pmod{2\pi n}. \end{aligned}$$

Es gilt jedoch $|\theta - \theta'| < \pi < 2\pi|h - k| < 2\pi n$, was der letzten Gleichheit modulo $2\pi n$ widerspricht. Also sind $\{V_k\}_{k=1,\ldots,n}$ paarweise disjunkt. Weiterhin ist es einfach zu sehen, dass $\pi_n|_{V_k} \colon V_k \to U$ eine stetige Bijektion ist für alle $k = 1, \ldots, n$. Außerdem ist $(\pi_n|_{V_k})^{-1} \colon U \to V_k$ gegeben durch

$$(\pi_n|_{V_k})^{-1} \left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta/n} \xi_k$$

für alle $e^{i\theta} \in U$, also für $|\theta - \theta_0| < \pi/2$. Also ist $(\pi_n|_{V_k})^{-1}$ ebenfalls stetig und $\pi_n|_{V_k} \colon V_k \to U$ somit ein Homöomorphismus für alle $k = 1, \ldots, n$.

Wir haben nun zwei Möglichkeiten zu schließen, dass π_n eine Überlagerung ist.

<u>Variante 1</u> (unter benutzung der alternativen Definition als lokal triviale Faserung mit diskreter Faser):

Wir definieren nun $f \colon \bigcup_{k=1}^n V_k \to \{1, \ldots, n\}$ durch $f(x) = k$, falls $x \in V_k$. Diese Abbildung ist stetig, weil $f^{-1}(k) = V_k$ offen ist für alle $k = 1, \ldots, n$, wobei wir $\{1, \ldots, n\}$ mit der diskreten Topologie betrachten. Also ist auch die Abbildung $h \colon \pi_n^{-1}(U) = \bigcup_{k=1}^n V_k \to U \times \{1, \ldots, n\}$, $h = (\pi_n, f)$ stetig. Die Abbildung h ist bijektiv, wobei die Inverse (u, k) auf den eindeutigen Punkt $v \in V_k$ schickt mit $\pi_n|_{V_k}(v) = u$. Schließlich ist auch h^{-1} stetig, denn für $V \subseteq \pi_n^{-1}(U)$ ist $h(V)$ die disjunkte Vereinigung der offenen Mengen $\pi_n(V \cap V_k) \times \{k\}$. Es ist klar, dass $pr_1 \circ h = \pi_n|_{\pi_n^{-1}(U)}$ gilt (wobei pr_1 wiederum die Projektion auf die erste Koordinate bezeichnet), also erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi_n"'] & & U \times \{1, \ldots, n\} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

und somit ist π_n eine lokal triviale Faserung wie gewünscht.

<u>Variante 2</u> (mit der Definition):

Anstatt wie in Variante 1 zu argumentieren, dass π_n eine lokal triviale Faserung ist, kann man auch die Definition benutzen. Die Mengen V_k sind die Blätter von π_n über der gleichmäßig überlagerten Menge U.

4. Sei $\pi \colon Y \to X$ eine lokal triviale Faserung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei F ein topologischer Raum. Dann ist die Menge $\{x \in X \mid \pi^{-1}(x) \cong F\}$ offen und abgeschlossen in X.

(b) Falls X zusammenhängend ist, dann gilt $\pi^{-1}(x_1) \cong \pi^{-1}(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$.

Lösung:

(a) Sei $A := \{x \in X \mid \pi^{-1}(x) \cong F\}$. Wir zeigen zunächst, dass A offen ist. Sei dazu $x \in A$. Dann gilt $\pi^{-1}(x) \cong F$. Weil π eine lokal triviale Faserung ist, gibt es eine Umgebung U von x, einen topologischen Raum G und einen Homöomorphismus $h \colon \pi^{-1}(U) \to U \times G$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times G \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei $pr_1 \colon U \times G \to U$, $(x, g) \to x$ die Projektion auf die erste Koordinate bezeichnet. Wir behaupten, dass $U \subseteq A$ gilt. Tatsächlich ist für jeden Punkt $y \in U$ die Einschränkung $h|_{\pi^{-1}(y)} \colon \pi^{-1}(y) \to U \times G$ eine stetige, injektive Abbildung mit Bild $\{y\} \times G$, also $h|_{\pi^{-1}(y)} \colon \pi^{-1}(y) \to \{y\} \times G$ ein Homöomorphismus. Insbesondere gilt also $\pi^{-1}(y) \cong \{y\} \times G \cong G$ für alle $y \in U$ und wegen $x \in A$ muss $G \cong F$ gelten. Es folgt $U \subseteq A$, also ist A offen.

Analog gibt es für alle $x \in X \setminus A$ eine Umgebung U von x mit einem kommutativen Diagramm wie oben und es ist leicht einzusehen, dass dann $U \subseteq X \setminus A$ gilt. Also ist A auch abgeschlossen.

(b) Sei X nun zusammenhängend und sei $x \in X$. Wie im Beweis von (a) sieht man, dass es einen topologischen Raum F gibt, sodass $\pi^{-1}(x) \cong \{x\} \times F \cong F$ gilt. Also ist $A := \{x \in X \mid \pi^{-1}(x) \cong F\}$ nichtleer und nach (a) auch offen und abgeschlossen. Somit ist $X = A \dot\cup (X \setminus A)$ eine Zerlegung von X in disjunkte offene Mengen. Da X nach Voraussetzung zusammenhängend ist, muss also $X \setminus A = \emptyset$ gelten, also gilt $X = A$ und damit die Behauptung.

5. Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $p \colon X \to Y$ und $q \colon Y \to Z$ Überlagerungen. Weiter sei $q^{-1}(z)$ für alle $z \in Z$ eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass $q \circ p \colon X \to Z$ eine Überlagerung ist.

Lösung:

Sei $z \in Z$, sei $q^{-1}(z) := \{y_1, \dots, y_n\}$, und sei U eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung von z (für die Überlagerung $q : Y \to Z$). Per Definition, gilt $q^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} O_i$, wobei die O_i disjunkte offene Mengen von Y sind, und $y_i \in O_i$. Für jedes $i = 1, \dots, n$, sei U_i eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung von y_i (für die Überlagerung $p : X \to Y$). Wir definieren $V_i := U_i \cap O_i$.

Wir bemerken, dass für jedes $i = 1, \dots, n$ folgendes gilt:

- V_i ist eine offene Umgebung von y_i;
- $V_i \cap V_j = \varnothing$ wenn $i \neq j$;
- $q|_{V_i} : V_i \to q(V_i) \subset U$ ist ein Homöomorphismus;
- V_i ist eine gleichmässig überlagerte Umgebung von y_i (für die Überlagerung $p : X \to Y$).

Jetzt können wir definieren

$$W := \bigcap_{i=1}^{n} q(V_i) \subset Z.$$

Dann ist W eine offene Umgebung von z (hier benutzen wir, dass $q^{-1}(z)$ endlich ist). Weil $W \subset q(V_i)$, und $q(V_i)$ gleichmässig überlagert für q ist, ist W auch für q gleichässig überlagert. Andererseits, weil $q^{-1}(W) \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$, folgern wir, dass $q^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^n W_i$, wobei $W_i := q^{-1}(W) \cap V_i$ offene disjunkte gleichmässig überlagerte Umgebungen von y_i sind.

Schliesslich zeigen wir, dass W eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung von z ist, für die Abbildung $q \circ p$. Es gilt $(q \circ p)^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^n p^{-1}(W_i)$, und $p^{-1}(W_i)$ sind disjunkt (weil W_i sind disjunkt). Ausserdem, weil jedes W_i gleichmässig überlagert für p ist, existiert eine Indexmenge J_i und disjunkte offene Mengen T^i_j, sodass $p^{-1}(W_i) = \bigcup_{j \in J_i} T^i_j$, und $p|_{T^i_j} : T^i_j \to W_i$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $j \in J_i$. Als Ergebnis, ist $(q \circ p)|_{T^i_j} = q|_{W_i} \circ p|_{T^j_i} : T^j_i \to W$ ein Homöomorphismus. Deshalb ist W eine gleichmässig überlagerte offene Umgebung von z, für die Abbildung $q \circ p$, die somit eine Überlagerung ist.