Lösungen zu Serie 13

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei $Z \subseteq \mathbb{C}^*$ offen und zusammenhängend, $z_0 \in Z$ und $i\colon Z \to \mathbb{C}^*$ die Inklusion. Zeigen Sie, dass sich genau dann ein stetiger Logarithmus auf Z definieren lässt, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist. Hierbei sei ein Logarithmus auf Z eine Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$, welche $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$ erfüllt.

   Lösung:

   Weil $Z \subseteq \mathbb{C}^* \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend ist, ist es auch wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Wir betrachten die Überlagerung $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$, und wählen ein $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ mit $\pi(\tilde{z}) = z_0$. Nach dem Hochhebbarkeitskritierum exisiert nun eine stetige Abbildung $\log\colon Z \to \mathbb{C}$ mit $\pi \circ \log = i$ (also $e^{\log(z)} = z$ für alle $z \in Z$) und $\log(z_0) = \tilde{z}$ genau dann, wenn

   $$i_*(Z, z_0) \subseteq \pi_*\left(\pi_1\left(\mathbb{C}, \tilde{z}\right)\right) = \pi_*\left(\{0\}\right) = \{0\}$$

   gilt, also genau dann, wenn $i_*(\pi_1(Z, z_0)) \subseteq \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ die triviale Gruppe ist.

2. Bestimmen Sie zwei Überlagerungen $p\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ des Torus T^2, sodass $p'\colon X \to T^2$ und $p'\colon X' \to T^2$ die gleiche (endliche) Anzahl von Blättern haben, aber sodass es keine Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt mit $p' \circ \phi = \psi \circ p$.

   Lösung:

   Wir identifizieren den Torus T^2 mit $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und betrachten die beiden Überlagerungen $p\colon T^2 \to T^2$ und $p'\colon T^2 \to T^2$ gegeben durch $p([(t, s)]) := [(2t, 2s)]$ und $p'([(t, s)]) := [(t, 4s)]$ für $[(t, s)] \in T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Beachten Sie, dass p und p' beide Überlagerungen vom Grad 4 über T^2 sind. Außerdem gilt

   $$p_*(\pi_1(T^2)) = (2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T^2) \quad \text{und} \quad p_*(\pi_1(T^2)) = \mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \pi_1(T^2).$$

   Nehmen wir nun an, dass es Homöomorphismen $\phi\colon X \to X'$ und $\psi\colon T^2 \to T^2$ gibt, so dass $p' \circ \phi = \psi \circ p$ gilt, dann ist insbesondere

   $$(2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z}) = p'_*(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = p'_* \circ \phi_*(\pi_1(T^2)) = \psi_* \circ p_*(\pi_1(T^2)) = \psi_*(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})),$$

   d.h. es gibt einen Isomorphismus $F = \psi_*\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit $F(\mathbb{Z}\times(4\mathbb{Z})) = (2\mathbb{Z})\times(2\mathbb{Z})$. Dies ist aber nicht möglich, denn die Quotienten $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times (4\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/((2\mathbb{Z}) \times (2\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ sind nicht isomorph.

3. Sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

   Lösung:

   Aus der Endlichkeit der Fundamentalgruppe von X folgt, dass jedes Element $h \in \pi_1(X)$ endliche Ordnung hat. Daher hat das Element $f_*(h) \in \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ebenfalls endliche Ordnung (weil f_* ein Homomorphismus ist), was impliziert, dass es Null ist, da es keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{Z}$ gibt. Wir haben also gezeigt, dass $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} \subseteq \pi_1(S^1)$.

Betrachten wir nun die universelle Überlagerung $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ von S^1. Wegen $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} = p_*(\pi_1(\mathbb{R}))$ sind die Voraussetzungen des Hochhebbarkeitskriteriums erfüllt und somit existiert eine Hochhebung $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ von f. Weil $\mathbb{R}$ zusammenziehbar (kontrahierbar) ist, ist nach Aufgabe 5 (b) von Serie 6 jede Abbildung $X \to \mathbb{R}$ homotop zu einer konstanten Abbildung, also ist auch $f = p \circ \tilde{f}$ homotop zu einer konstanten Abbildung (betrachte die Verknüpfung einer Homotopie $X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ mit p.)

4. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung. Dann heißt

$$\mathrm{Deck}(\pi) = \{\varphi\colon Y \to Y \mid \varphi \text{ ist ein Homöomorphismus}, \pi \circ \varphi = \pi\}$$

die Menge der *Decktransformationen* von π. Bestimmen Sie $\mathrm{Deck}(\pi)$ für

(a) die Überlagerung $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1, r \mapsto e^{2\pi i r}$,

(b) die Überlagerungen $\pi_n\colon S^1 \to S^1, z \mapsto z^n$, für $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Die Menge $\mathrm{Deck}(\pi)$ bildet mit der üblichen Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

Lösung:

(a) Für $k \in \mathbb{Z}$ defnieren wir $\varphi_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, r \mapsto r + k$. Dann ist φ_k ein Homöomorphismus und es gilt $\pi \circ \varphi_k = \pi$. Wir behaupten, dass $\mathrm{Deck}(\pi) = \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt. Zu zeigen ist, dass jede Decktransformation in $\mathrm{Deck}(\pi)$ einem φ_k für $k \in \mathbb{Z}$ entspricht. Sei also $\varphi \in \mathrm{Deck}(\pi)$. Dann gilt $e^{2\pi i \varphi(0)} = (\pi \circ \varphi)(0) = \pi(0) = 1$, also $k := \varphi(0) \in \mathbb{Z}$. Nun sind φ und φ_k beides Hochhebungen von π bezüglich der Überlagerung π, welche in $0 \in \mathbb{R}$ übereinstimmen, also folgt aus Satz 1 der Vorlesung aus Woche 13 (Hochhebbarkeitskriterium), dass $\varphi = \varphi_k$ gelten muss.
Bemerkung: Es gilt also $\mathrm{Deck}(\pi) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Ähnlich wie in Teilaufgabe (a) kann man zeigen, dass $\mathrm{Deck}(\pi_n) = \left\{z \mapsto e^{2\pi i k/n} z \mid k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}$ gilt, also $\mathrm{Deck}(\pi_n) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

5. Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Überlagerungen $\pi\colon Y \to X$ von X mit wegzusammenhängendem Y, wobei

(a) $X = S^1$,

(b) $X = S^1 \times S^2$,

(c) $X = S^1 \vee S^2$.

Lösung:

(a) Die Überlagerungen von S^1 sind bis auf Isomorphie genau die Überlagerungen aus Aufgabe 4. Genauer: Jede der Überlagerungen aus Aufgabe 4, also π aus Aufgabe 4 (a) bzw. π_n aus Aufgabe 4 (b) für $n \in \mathbb{N}$, hat eine andere der Untergruppen von $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ als charakteristische Untergruppe (bei sinnvoller Basispunktwahl) und alle Untergruppen kommen vor. Damit ist nach Korollar 3 (Eindeutigkeitssatz für Überlagerungen) jede Überlagerung mit wegzusammenhängendem Y isomorph zu genau einer der in 4a) beschriebenen.

Bemerkung zur Anwendbarkeit von Korollar 3: Da S^1 lokal wegzusammenhängend ist, ist dies auch für jedes Y einer Überlagerung von X der Fall.

(b) Wegen $\pi_1\left(S^2\right) \cong \{1\}$ gibt es bis auf Isomorphie nur die universelle Überlagerung $\mathrm{id}\colon S^2 \to S^2$ von S^2. Die Überlagerungen von $S^1 \times S^2$ sind die Produkte $\mathbb{R} \times S^2 \to S^1 \times S^2, (r, x) \mapsto \left(e^{2\pi i r}, x\right)$ und $S^1 \times S^2 \to S^1 \times S^2, (z, x) \mapsto (z^n, x)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(c) Die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^2$ ist der topologische Raum $\mathbb{R} \cup_{k \in \mathbb{Z}} S^2$, wobei wir an jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ eine Kopie der Sphäre S^2 kleben. Die weiteren Überlagerungsräume sind bis auf Isomorphie die Quotientenräume X_n für $n \in \mathbb{N}$, wobei wir X_n jeweils bilden, indem wir an alle n-ten Einheitswurzeln in S^1 eine Kopie der Sphäre S^2 kleben. Die Überlagerungsabbildungen ergeben sich aus den Abbildungen in Aufgabe (4).

6. Sei X der Hawaiische Ohrring (vgl. Vorlesung aus Woche 9). Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) X ist nicht semilokal einfach zusammenhängend.
   (b) Der Kegel CX über X ist semilokal einfach zusammenhängend, aber nicht lokal einfach zusammenhängend.

   Lösung:

   (a) Zur Erinnerung: Der Hawaiische Ohrring X ist definiert als $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \subseteq \mathbb{C}$, wobei für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $C_n = \left\{ z \mid \left| z - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \right\}$ der Kreis vom Radius $\frac{1}{n}$ um den Punkt $\frac{1}{n} \in \mathbb{C}$ ist.

   Wir betrachten eine beliebige Umgebung U des Punkts 0, in dem sich die Kreise häufen. Mindestens einer der Kreise ist vollständig in dieser Umgebung enthalten. Eine Schleife, die einmal um diesen Kreis herumgeht, ist ein nicht-trivialer Vertreter der Fundamentalgruppe von U und wird durch die Inklusion auf eine nicht-triviale Schleife in X abgebildet.

   (b) Skizze: Der Kegel CX über einem Raum X ist immer wegzusammenhängend und kontrahierbar, also einfach zusammenhängend. Damit ist CX auch semilokal einfach zusammenhängend: die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x) = \{0\}$ ist trivial für jede Umgebung U eines beliebigen Punktes $x \in CX$.

   Wir betrachten nun eine Umgebung des Punkts $[(0,0)] \in CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$. Von jeder kleinen Umgebung U dieses Punkts gibt es einen Deformationsretrakt auf eine Umgebung von 0 in X, also ist U nicht einfach zusammenhängend, und damit CX nicht lokal einfach zusammenhängend.

7. Finden Sie bis auf Isomorphie alle 2- und 3-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ und finden Sie eine Überlagerung $\pi \colon Y \to S^1 \vee S^1$, sodass $\pi_1(Y)$ unendlich erzeugt ist. (∗)