Lösungen zu Serie 2

Hinweis: Mit einem Stern (∗) gekennzeichnete Aufgaben sind schwierig und zum Knobeln gedacht.

1. Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen X und Y.
   (a) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$ auch $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen ist.
   (b) Sei $f: X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass für Teilmengen $X_0 \subseteq X$ und $Y_0 \subseteq Y$ mit $f(X_0) \subseteq Y_0$ auch die Einschränkung
   $$f|_{X_0}^{Y_0}: X_0 \to Y_0, \quad x \mapsto f(x),$$
   stetig ist. Hierbei werden X_0 und Y_0 mit der Teilraumtopologie betrachtet.
   (c) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für die Topologie von Y. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist für alle Mengen $V \in \mathcal{B}$. Es gilt eine äquivalente Aussage, wenn „Basis“ durch „Subbasis“ ersetzt wird.

Lösung:

(a) Sei f stetig und $A \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist $Y \setminus A \subseteq Y$ offen und somit $f^{-1}(Y \setminus A) \subseteq X$ offen, da f stetig ist. Nun ist aber $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, also folgt, dass $f^{-1}(A)$ abgeschlossen ist. Umgekehrt gelte, dass für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subseteq Y$ die Menge $f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschlossen ist. Für eine offene Menge $U \subseteq Y$ ist nun die Menge $Y \setminus U$ abgeschlossen, also ist nach Vorraussetzung auch $f^{-1}(Y \setminus U) \subseteq X$ abgeschlossen. Wegen $f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$ impliziert dies, dass $f^{-1}(U)$ offen ist, also f stetig.

(b) Sei $U \subseteq Y_0$ offen, d.h. es existiert eine offene Menge $V \subseteq Y$ mit $U = V \cap Y_0$. Es gilt nun
$$\begin{aligned}\left(f|_{X_0}^{Y_0}\right)^{-1}(U) &= \left\{x \in X_0 \mid f|_{X_0}^{Y_0}(x) \in U\right\} = \{x \in X_0 \mid f(x) \in V \cap Y_0\} = f^{-1}(V \cap Y_0) \cap X_0 \\ &= f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Y_0) \cap X_0 = f^{-1}(V) \cap X_0\end{aligned}$$
wegen $X_0 \subseteq f^{-1}(Y_0)$. Nun ist $f^{-1}(V) \cap X_0$ eine offene Menge in X_0, da $f^{-1}(V) \subseteq X$ wegen der Stetigkeit von f offen ist, also ist $f|_{X_0}^{Y_0}$ stetig.

(c) Die eine Richtung ist egal ob „Basis“ oder „Subbasis“ jeweils klar, die andere Richtung folgt aus den Definitionen und der Tatsache, dass sich Urbilder und Vereinigungen (bzw. Urbilder und Vereinigungen und Durchschnitte im Fall der Subbasis) gut vertragen.

2. Zeigen Sie, dass die folgenden topologischen Räume jeweils homöomorph sind.
   (a) Das Intervall $[0, 1]$ und das Intervall $[2, 5]$.
   (b) Das Intervall $(-1, 1)$ und $\mathbb{R}$.
   (c) Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und das abgeschlossene Quadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$ in $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

(a) Wir betrachten die Abbildung $f: [0, 1] \to [2, 5]$ definiert durch $f(t) := 2+3t$. Es ist klar, dass f stetig und bijektiv mit stetiger Inverser ist. Tatsächlich gilt $f^{-1}(t) = \frac{t-2}{3}$. Also ist f ein Homöomorphismus.

(b) Wir betrachten die Abbildung $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{1-t} & \text{if } t \geq 0 \\ \frac{t}{1+t} & \text{if } t < 0. \end{cases}$$

Wegen $t/(1-t) = t/(1+t)$ für $t = 0$ ist die Abbildung stetig. Außerdem gilt $\lim_{t\to\pm 1} f(t) = \pm\infty$ und f ist streng monoton wachsend, da $f'(t)$ wohldefiniert und größer als 0 ist für alle $t \in (-1,0)\cup(0,1)$. Also ist f bijektiv mit Inverser

$$f^{-1}(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t} & \text{if } t \geq 0 \\ \frac{t}{1-t} & \text{if } t < 0, \end{cases}$$

welche ebenfalls stetig ist. Also ist f ein Homöomorphismus.

Alternative Lösung (Skizze): Wir bemerken zuerst, dass durch die Abbildung $f(t) := \pi t/2$ das Intervall $(-1,1)$ homöomorph ist zu $(-\pi/2, \pi/2)$. Das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ ist aber auch homöomorph zu $\mathbb{R}$. Ein Homömorphismus ist dabei gegeben durch $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$.

(c) Sei $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Euklidische Kugel in $\mathbb{R}^2$ und $Q := [-1,1]^2$ das abgeschlossene Quadrat. Wir definieren ein Homöomorphismus $f : B \to Q$ als die Komposition von zwei Homöomorphismen $B \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} Q$, wo L die ℓ^1-Kugel in $\mathbb{R}^2$ ist, d.h. $L := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \leq 1\}$.

Wir nehmen $g : B \to L : (x,y) \mapsto (\operatorname{sgn}(x)x^2, \operatorname{sgn}(y)y^2)$. Diese ist eine stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung $g^{-1} : L \to B : (x,y) \mapsto (\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|}, \operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|})$ auch stetig ist.

Dann definiert man $h : L \to Q$ als die Komposition einer Drehung von $\pi/4$ und einer Multiplikation mit dem Skalar $1/\sqrt{2}$. Drehungen und Multiplicationen mit Skalaren sind Homöomorphismen, daher ist h auch ein Homöomorphismus. Also ist auch f ein Homöomorphismus.

3. Welche Teilmengen von $\mathbb{Q}$ (betrachtet mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}$) sind zusammenhängend?

Lösung:

Sei $A \subseteq \mathbb{Q}$. Angenommen, A enthält zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{Q}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $a < x < b$. Dann sind die beiden Mengen $(-\infty, x)\cap\mathbb{Q}$, $(x,\infty)\cap\mathbb{Q}$ offen und nichtleer und deren Vereinigung überdeckt A. Da der Durchschnitt der beiden Mengen leer ist, folgt, dass A nicht zusammenhängend ist.
Andererseits sind alle einelementigen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ und die leere Menge zusammenhängend.

4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie: X ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung von X nach $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie gibt.

Lösung:

Angenommen, X ist nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, offene, disjunkte Teilmengen $U, V \subseteq X$, sodass $X = U \cup V$, und

$$\begin{aligned} f\colon X &\to \{0,1\}, \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases} \end{aligned}$$

ist eine wohldefinierte, surjektive und stetige Abbildung.
Umgekehrt sind wir für eine solche surjektive, stetige Abbildung $f\colon X \to \{0,1\}$ die Mengen $U := f^{-1}(0)$ und $V := f^{-1}(1)$ nichtleere, offene Teilmengen von X und es gilt $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$, sodass X per Definition nicht zusammenhängend ist.

5. Seien X, Y und Z nichtleere topologische Räume.

(a) Sei $f\colon Z \to X \times Y$, $z \mapsto (f_X(z), f_Y(z))$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn $f_X\colon Z \to X$ und $f_Y\colon Z \to Y$ stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann wegzusammenhängend sind, wenn $X \times Y$ wegzusammenhängend ist.

Lösung:

(a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass Kompositionen stetiger Abbildungen stetig sind und dass die Projektionen $\pi_X\colon X \times Y \to X, \pi_Y\colon X \times Y \to Y$ stetig sind, also sind $f_X = \pi_X \circ f, f_Y = \pi_Y \circ f$ stetig, falls f stetig ist.
Für die umgekehrte Richtung benutzen wir Teil (c) von Aufgabe 1 und dass die Mengen $U \times V$ für offene Mengen $U \subseteq X, V \subseteq Y$ eine Basis der Produkttopologie von $X \times Y$ bilden. Somit genügt es also zu zeigen, dass $f^{-1}(U \times V) \subseteq Z$ offen ist für alle solchen U, V. Es ist nun aber $f^{-1}(U \times V) = f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V)$, was wegen der Stetigkeit von f_X und f_Y ein Durchschnitt von offenen Mengen, also eine offene Menge ist.

(b) Eine Richtung ist wiederum einfach, da das stetige Bild wegzusammenhängender Mengen wegzusammenhängend ist. Für die andere Richtung kann (b) benutzt werden, um aus Pfaden in X und Y einen passenden Pfad in $X \times Y$ zu basteln.

6. Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass es für jede Menge von Teilmengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ genau eine Topologie $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ auf X gibt, sodass $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ ist.

   Zeigen Sie weiter, dass dies die kleinste (auch gröbste genannt) Topologie von X ist, die $\mathcal{S}$ enthält, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, dann gilt $\mathcal{O}_\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$.

   Lösung:

   Wir definieren $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ als die Menge aller Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$.

   Ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X mit $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$, so muss eine in $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ offene Menge wegen der Definition einer Topologie auch in $\mathcal{O}$ liegen. Andererseits, wenn $\mathcal{O}$ eine weitere Topologie ist, für die $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, sieht man leicht, dass $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_\mathcal{S}$ gelten muss. Dies zeigt die Eindeutigkeit.

7. Sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.

   (a) Wann ist X zusammenhängend?

   (b) Nehmen Sie an, X habe die Kardinalität von $\mathbb{R}$ (oder grösser). Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist.

   (c) Nehmen Sie an, X habe abzählbar unendlich viele Elemente. Zeigen Sie, dass X nicht wegzusammenhängend ist. $(*)$

   Lösung:

   (a) $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ist zusammenhängend genau dann, wenn X unendlich, die leere Menge oder einelementig ist.

   (b) Sei $f\colon [0,1] \to X$ eine injektive Abbildung (existiert nach Voraussetzung). Seien $a, b \in X$ und sei $\gamma\colon [0,1] \to X$ die Abbildung definiert durch $0 \mapsto a, 1 \mapsto b$ und $t \mapsto f(t)$ für $t \in (0,1)$. Die Urbilder endlicher Teilmengen von X unter γ sind dann endlich, also abgeschlossen, und es gilt $\gamma^{-1}(X) = [0,1]$, also ist γ stetig und somit ein Pfad von a nach b.