Lösungen zu Serie 3

1. Zeigen Sie, dass der Grenzwert einer Folge in einem Hausdorffraum, sofern er existiert, eindeutig ist.

   Lösung:

   Sei $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit Grenzwert x. Desweiteren sei $y \in X$ ein beliebiger, von x verschiedener Punkt in X. Da X ein Hausdorffraum ist, existieren zwei disjunkte offene Mengen U und V in X so, dass $x \in U$ und $y \in V$. Da U eine offene Umgebung von x ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$ gilt. Da U und V disjunkt sind, können wir jedoch kein solches N für V finden, womit y kein Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein kann.

2. Sei $(X, \mathcal{O}_{\text{cofin}})$ ein topologischer Raum mit der kofiniten Topologie.

   (a) Zeigen Sie, dass X das Axiom T_1 erfüllt, d.h. für zwei verschiedene Punkte $a \neq b$ in X existieren offene Umgebungen von a und b, welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten.

   Lösung:

   Seien $a \neq b \in X$. Dann erfüllen die offenen Mengen $X \setminus \{b\}$ (offene Umgebung von a, die b nicht enthält) und $X \setminus \{a\}$ (offene Umgebung von b, die a nicht enthält) die gewünschte Eigenschaft.

   (b) Wann ist X ein Hausdorffraum?

   Lösung:

   Dies kann nur der Fall sein, wenn X endlich ist, denn für unendliche Mengen X mit der kofiniten Topologie ist der Durchschnitt zweier nichtleerer, offener Mengen nie leer. In der Tat sind für endliche Mengen X aber $\{a\}$ und $X \setminus \{a\}$ immer disjunkte Umgebungen von a und $b \neq a$.

   (c) Zeigen Sie, dass ein beliebiger topologischer Raum X genau dann das Axiom T_1 erfüllt, wenn alle einelementigen Teilmengen von X abgeschlossen sind.

   Lösung:

   Sei X ein topologischer Raum, der T_1 erfüllt, und $x \in X$. Für alle $y \neq x$ gibt es also eine offene Umgebung U_y von y, sodass $x \notin U_y$ gilt. Dann ist $\{x\} = X \setminus \bigcup\{U_y \mid y \in X \setminus \{x\}\}$ abgeschlossen. Umgekehrt, seien $a, b \in X$ mit $a \neq b$. Dann sind $\{a\}$ und $\{b\}$ abgeschlossen, also $X \setminus \{b\}$ und $X \setminus \{a\}$ offene Umgebungen mit der gewünschen Eigenschaft.

3. Sei X eine Menge.

   (a) Was sind die kompakten Mengen in X mit der diskreten Topologie?

   Lösung:

   Wir wollen beweisen, dass ein Unterraum $A \subseteq X$ kompakt ist, genau dann wenn er endlich ist. Offensichtlich ist jede endliche Teilmenge von X kompakt, so dass wir die andere Implikation beweisen wollen. Betrachten wir einen unendlichen Unterraum $A \subseteq X$. Dann ist $\{x\}$ offen in A für jedes $x \in A$, da A die diskrete Topologie von X erbt. Daher ist $\mathcal{O} := \{\{x\} : x \in A\}$ eine unendliche offene Überdeckung von A. Offensichtlich lässt $\mathcal{O}$ aber keine endliche Teilüberdeckung zu, also ist A nicht kompakt.

   (b) Was sind die kompakten Mengen in X mit der kofiniten Topologie?

   Lösung:

   Alle Teilmengen von X mit der kofiniten Topologie sind kompakt. Für endliche Teilmengen (und insbesondere für endliche Mengen X) folgt dies aus der Definition. Sei also X unendlich, $A \subseteq X$

eine unendliche Teilmenge und $\mathcal{U} = \{A \setminus F_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A für endliche Mengen $F_i \subseteq X, i \in I$. Dann gilt

$$A = \bigcup_{i \in I} A \setminus F_i = A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right),$$

also $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Sei nun $F_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Für alle $k = 1, \ldots, n$, gibt es dann ein $i_k \in I$ sodass $x_k \notin F_{i_k}$ gilt, da der Durchschnitt aller F_i's leer ist. Es gilt also $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \cap F_1 = \emptyset$, sodass $\mathcal{U}' := \{A \setminus F_1\} \cup \{A \setminus F_{i_k}\}_{k=1}^n$ eine endliche Teilüberdeckung von A ist.

4. (Zusammenhangskomponenten) Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$.

   (a) Die Menge
   $$\{x \in X \mid \exists A \subseteq X \text{ zusammenhängend mit } x_0, x \in A\}$$
   heißt *Zusammenhangskomponente* von x_0. Zeigen Sie, dass dies die größte zusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält, und weiter, dass dies eine abgeschlossene Teilmenge von X ist.

   Lösung:

   Es ist leicht zu sehen, dass jede zusammenhängende Menge, die x_0 enthält, in der Zusammenhangskomponente von x_0 enthalten ist. Wir zeigen noch, dass die Zusammenhangskomponente Z von x_0 auch zusammenhängend ist: Angenommen, Z lässt sich schreiben als $(Z \cap U) \cup (Z \cap V)$ für offene Mengen U und V, $(Z \cap U) \neq \emptyset \neq (Z \cap V)$ und $(Z \cap U) \cap (Z \cap V) = \emptyset$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt $x_0 \in U$. Nun sei $x \in Z \cap V$ und $A \subseteq X$ zusammenhängend (insbesondere gilt $A \subseteq Z$, wie schon gezeigt). Dann gilt $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$, was im Widerspruch dazu steht, dass A zusammenhängend ist.
   Für den zweiten Teil der Aussage kann man zum Beispiel erst zeigen, dass der Abschluss einer zusammenhängenden Menge immer zusammenhängend ist. Dann ist der Abschluss der Zusammenhangskomponente Z von x_0 eine zusammenhängende Menge, die x_0 enthält, also folgt aus dem ersten Teil, dass $\bar{Z} \subseteq Z$ gilt. Daraus folgt die Behauptung.

   (b) Die Menge
   $$\{x \in X \mid \text{ es gibt einen Weg von } x \text{ nach } x_0\}$$
   heißt *Wegzusammenhangskomponente* von x_0. Zeigen Sie, dass dies die größte wegzusammenhängende Teilmenge von X ist, welche x_0 enthält.

   (c) Was sind die Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$?

   Lösung:

   Die Zusammenhangskomponenten bzw. Wegzusammenhangskomponenten in $\mathbb{Q}$ sind genau die einelementigen Teilmengen von $\mathbb{Q}$ (vgl auch Aufgabe 3 von Serie 2.)

   (d) Finden Sie ein Beispiel eines topologischen Raums mit einer Wegzusammenhangskomponente, die nicht abgeschlossen ist.

   Lösung:

   Sei Z die "topologist's sine curve" aus der Vorlesung. Z_0 und Z_1 bilden gerade die Wegzusammenhangskomponenten von Z. Jeder Punkt in Z_0 liegt im Rand von Z_1 und damit ist $\overline{Z_1} = Z$ und Z_1 ist somit nicht abgeschlossen in Z.

5. Seien X und Y nichtleere topologische Räume.

   (a) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann zusammenhängend sind, wenn $X \times Y$ zusammenhängend ist.

   Lösung:

   Wenn $X \times Y$ zusammenhängend ist, dann sind X und Y zusammenhängend als stetige Bilder unter den Projektionsabbildungen $\pi_X \colon X \times Y \to X$ bzw. $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$.

Für die Umkehrung benutzen wir die Aussage aus Serie 2 Aufgabe 4. Sei $(a,b) \in X \times Y$ und $f\colon X \times Y \to \{0,1\}$ eine beliebige stetige Abbildung. Wir müssen zeigen, dass f konstant (also nicht surjektiv) ist. Betrachte die stetige surjektive Abbildung

$$\iota\colon X \longrightarrow X \times \{b\}$$

gegeben durch $\iota(x) = (x,b)$. Dann ist nach Aufgabe 1 (b) von Serie 2 die Abbildung $f\big|_{X\times\{b\}} \circ \iota$ stetig und konstant (da X zusammenhängend ist). Somit ist jedoch auch $f\big|_{X\times\{b\}}$ konstant.
Analog sei für jedes $x \in X$ eine stetige surjektive Abbildung

$$\iota_x\colon Y \longrightarrow \{x\} \times Y$$

durch $\iota_x(y) = (x,y)$ gegeben. Dann ist $f\big|_{\{x\}\times Y} \circ \iota_x$ stetig und konstant. Folglich ist auch $f\big|_{\{x\}\times Y}$ konstant. Wegen $(x,b) \in X \times \{b\} \cap \{x\} \times Y$ ist f eingeschränkt auf

$$T_x := X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$$

ebenfalls konstant.
Für alle $x \in X$ gilt $(a,b) \in T_x$ und

$$X \times Y = \bigcup_{x\in X} T_x,$$

also folgt, dass f auf ganz $X \times Y$ konstant ist. Damit ist gezeigt, dass $X \times Y$ zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass X und Y genau dann kompakt sind, wenn $X \times Y$ kompakt ist.
Lösung:
Vgl. Bemerkung 3 in Abschnitt 1.8 in Jänich.

6. Die *Cantor-Menge* $C \subseteq \mathbb{R}$ ist wie folgt definiert. Sei

$$C_1 := [0,1] \quad \text{und} \quad C_n := \frac{1}{3}C_{n-1} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_{n-1}\right).$$

Nachfolgend sind C_1 bis C_7 abgebildet.

Dann ist die Cantor-Menge definiert durch

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge abgeschlossen ist.
(b) Zeigen Sie, dass die Cantor-Menge überabzählbar ist.
(c) Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von C jeweils nur aus einem Punkt bestehen.

Lösung:

(a) Nach Definition ist die Cantor-Menge der Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen.

(b) Für jede Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definieren wir

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{2}{3^m}.$$

Alle solche x sind verschieden und in allen C_m und somit in C enthalten. Da es überabzählbar viele 0-1-Folgen gibt, ist die Cantor-Menge C überabzählbar.

(c) Wir nehmen widerspruchsweise an, dass es eine Zusammenhangskomponente in C gibt, welche mindestens zwei verschiedene Punkte x und y enthält. Bezeichne den Abstand dieser zwei Punkte (in der Standardmetrik) mit $\delta > 0$. Die Mengen C_n sind eine disjunkte Vereinigung von (abgeschlossenen) Intervallen der Länge $\frac{1}{3^{n-1}}$. Somit liegen die beiden Punkte x und y für n genügend gross (abhängig von δ) in unterschiedlichen Intervallen von C_n. Da $C \subseteq C_n$ gilt, können diese zwei Punkte somit nicht in derselben Zusammenhangskomponente von C liegen, im Widerspruch zur Annahme.