Lösungen zu Serie 4

1. Seien X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi\colon X \to X/\sim$, $x \mapsto [x]$. Zeigen Sie:
   (a) Die Quotiententopologie
   $$\mathcal{O}_{X/\sim} := \left\{U \subseteq X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\right\}$$
   ist eine Topologie auf $X/\sim$.
   (b) Die Abbildung π ist stetig.
   (c) $\mathcal{O}_{X/\sim}$ ist die größte (auch *feinste* genannt) Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, d.h. falls $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$ ist, sodass π stetig ist, dann gilt $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$.

   Lösung:

   (a) Es gilt $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $\pi^{-1}(X/\sim) = X$, also $\emptyset, X/\sim \in \mathcal{O}_{X/\sim}$. Seien $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}_{X/\sim}$. Dann sind $\pi^{-1}(U_i) \subseteq X$ offen für alle $i \in I$ und
   $$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i)$$
   ist offen als Vereinigung in X offener Mengen, also $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}_{X/\sim}$. Für $U, V \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ ist
   $$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \subseteq X$$
   offen als Durchschnitt in X offener Mengen, also $U \cap V \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.

   (b) Für alle $U \in \mathcal{O}_{X/\sim}$ ist per Definition der Quotiententopologie $\pi^{-1}(U)$ offen in X, also π stetig.

   (c) Sei $\mathcal{O}$ eine Topologie auf $X/\sim$, sodass π stetig ist, und sei $U \in \mathcal{O}$. Dann ist $\pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen wegen der Stetigkeit, also $U \in \mathcal{O}_{X/\sim}$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n \mid |v| \le 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ gegeben durch
   $$v \sim w :\Leftrightarrow v = w \text{ oder } |v| = |w| = 1.$$
   Finden Sie einen zu $\mathbb{D}^n/\sim$ homöomorphen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$.

   Lösung:

   Es gilt $\mathbb{D}^n/\sim \cong S^n = \left\{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |v| = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Der Fall $n = 2$ wurde in der Vorlesung betrachtet. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ kann man einen analogen Homöomorphismus definieren, sodass der Beweis genauso funktioniert für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. (Der Torus) Zeigen Sie, dass der topologische Produktraum $X_1 = S^1 \times S^1$ homöomorph zum Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ ist, den man erhält, wenn man auf $Q = [0,1] \times [0,1]$ die Äquivalenzrelation $(s,0) \sim (s,1)$ für alle $s \in [0,1]$ und $(0,t) \sim (1,t)$ für alle $t \in [0,1]$ betrachtet. Dies sind zwei mögliche (äquivalente) Definitionen des Torus T^2.

Lösung:

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon [0,1]\times[0,1] \to S^1\times S^1 \subseteq \mathbb{R}^4,$$
$$(s,t) \mapsto (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Es ist leicht zu sehen, dass f eine stetige Abbildung ist. Außerdem gilt

$$f(s,0) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), 1, 0) = f(s,1)$$

für alle $s\in[0,1]$ und analog $f(0,t) = f(1,t)$ für alle $t\in[0,1]$. Die Abbildung f induziert also eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon X_2 \to S^1\times S^1$ auf dem Quotientenraum $X_2 = Q/\sim$ (hier haben wir die universelle Eigenschaft der Quotiententopologie verwendet). Wir wollen zeigen, dass $\tilde{f}$ ein Homöomorphismus ist. Es ist einfach zu überprüfen, dass $\tilde{f}$ bijektiv ist, daher folgt die Aussage aus dem Homöomorphismuskriterium (Satz aus der Vorlesung in Woche 3), da X_2 kompakt ist (als Quotient eines kompakten Raums, also als Bild eines kompakten Raums unter der Quotientenabbildung) und $S^1\times S^1$ ein Hausdorffraum ist (als Unterraum von $\mathbb{R}^4$, was ein Hausdorffraum ist).

4. (Der reelle projektive Raum) Zeigen Sie, dass die unten definierten topologischen Räume X_1, X_2 und X_3 homöomorph sind. Dies sind drei mögliche (äquivalente) Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$.
   (a) Sei $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Wir betrachten auf S^2 die Äquivalenzrelation $\sim$, die die Antipoden auf S^2 identifiziert, d.h. $u\sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$. Dann ist der topologische Raum X_1 definiert als der Quotientenraum $X_1 := S^2/\sim$.
   (b) Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2\subseteq\mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$, die die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u\sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$ für $u,v\in\partial\mathbb{D}^2$. Der topologische Raum X_2 ist dann der Quotientenraum $X_2 := \mathbb{D}^2/\sim$.
   (c) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der Geraden in $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung gehen. Für $L_1, L_2\in\mathcal{L}$ sei $0\le\alpha\le\pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 und wir definieren $d(L_1,L_2) := \alpha$. Dann definieren wir den topologischen Raum X_3 als $\mathcal{L}$ mit der durch d induzierten Topologie.

Lösung:

Wir zeigen zunächst, dass X_1 homöomorph zu X_2 ist. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{D}^2\subseteq\mathbb{R}^2 \to S^2\subseteq\mathbb{R}^3,$$
$$(x,y)\mapsto \left(x, y, \sqrt{1-(x^2+y^2)}\right).$$

Die Abbildung f bildet $\mathbb{D}^2$ homöomorph auf die nördliche Halbkugel $\{(x,y,z)\in S^2 \mid z\ge 0\}$ von S^2 ab. Wir bezeichnen mit $p\colon S^2\to S^2/\sim = X_1$ und $q\colon \mathbb{D}^2\to\mathbb{D}^2/\sim = X_2$ die entsprechenden Quotientenabbildungen. Beachten Sie, dass $p\circ f(u) = p\circ f(v)$ für alle $u\sim v$ in $\mathbb{D}^2$ gilt. Die Abbildung $p\circ f$ induziert daher eine stetige Abbildung $g\colon X_2\to X_1$ auf dem Quotientenraum X_2, d.h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{f} & S^2 \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & X_1. \end{array}$$

Es ist einfach zu überprüfen, dass die Abbildung g bijektiv ist, also impliziert wie in Aufgabe 3 das Homöomorphismuskriterium (Satz aus der Vorlesung in Woche 3), dass g ein Homöomorphismus ist, wie wir es wollten. In der Tat ist X_2 kompakt (als Quotient des kompakten Raums $\mathbb{D}^2$) und X_1 ist ein Hausdorffraum. Um zu sehen, dass X_1 ein Hausdorffraum ist, können wir für beliebige $u,v\in S^2$ mit

$p(u) \neq p(v)$ offene Umgebungen $U, V \subseteq S^2$ von u, v finden, die symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind (d.h. $U = -U$ und $V = -V$) und so, dass $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $p(U)$, $p(V)$ disjunkte offene Umgebungen von $p(u)$ und $p(v)$.

Wir zeigen nun, dass X_1 homöomorph zu X_3 ist. Wir betrachten dazu die Abbildung $h\colon S^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \to X_3$, wobei $h(u)$ für alle $u \in S^2$ definiert ist als die Gerade, die durch u und den Ursprung in $\mathbb{R}^3$ verläuft. Dann ist h stetig und surjektiv. Außerdem gilt $h(u) = h(v)$ genau dann, wenn $u = v$ oder $u = -v$ ist. Daher induziert h eine bijektive, stetige Abbildung $\tilde{h}\colon X_1 \to X_3$ auf dem Quotientenraum $X_1 = S^2/\sim$. Daraus folgt wiederum durch das Homöomorphismuskriterium (X_1 ist kompakt, da Quotient von S^2, und X_3 ist Hausdorff, da metrischer Raum), dass $\tilde{h}$ ein Homöomorphismus ist, womit der Beweis abgeschlossen ist.

5. Sei X ein topologischer Raum und sei $\Delta := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$ die Diagonale von $X \times X$.
   (a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn Δ in $X \times X$ abgeschlossen ist.
   (b) Sei $\sim$ eine beliebige Äquivalenzrelation auf X und definiere $R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$. Angenommen, $\pi\colon X \to X/\sim$ ist *offen*, d.h. das Bild $q(U)$ einer jeden offenen Menge $U \subseteq X$ ist offen in $X/\sim$. Zeigen Sie, dass $X/\sim$ genau dann ein Hausdorffraum ist, wenn R in $X \times X$ abgeschlossen ist.
   (c) Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass $\pi\colon G \to G/H, g \mapsto gH$ offen ist.

Lösung:

(a) Angenommen X ist Hausdorff. Wir zeigen, dass $Y := (X \times X) \setminus \Delta$ offen ist. Sei $(x, y) \in Y$, dann sind $x, y \in X$ verschiedene Elemente. Weil X Hausdorff ist, gibt es offene Mengen U_x, U_y sodass $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \varnothing$. Dann $(x, y) \in U_x \times U_y \subseteq Y$. Also ist Y offen.

Angenommen Y ist offen. Dann ist für jede $x \neq y \in X$ das Paar $(x, y) \in Y$. Da Y offen ist, gibt es offene Mengen $U_x, U_y \subseteq X$ sodass $(x, y) \in U_x \times U_y \subset Y$. Es folgt: $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \varnothing$. Also ist X Hausdorff.

(b) Wir müssen zeigen, dass R abgeschlossen ist gdw. $(\pi \times \pi)(R) = \Delta \subset (X/\sim \times X/\sim)$ abgeschlossen ist. Dann können wir Teil (a) benutzen.

Angenommen R ist abgeschlossen. Weil π offen ist, ist auch $\pi \times \pi$ offen: wenn $O \subset X \times X$ offen ist, schreiben wir $O = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \times V_i$ und

$$(\pi \times \pi)(O) = (\pi \times \pi)\left(\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi(U_i) \times \pi_i(V_i)$$

ist auch offen. Insbesondere ist $(\pi \times \pi)((X \times X) \setminus R) = (X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)$ offen, und so ist $(\pi \times \pi)(R)$ abgeschlossen.

Angenommen $(\pi \times \pi)(R)$ ist abgeschlossen, so ist $(X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)$ offen. Weil π stetig ist, ist auch $\pi \times \pi$ stetig. Insbesondere ist $(\pi \times \pi)^{-1}((X/\sim \times X/\sim) \setminus (\pi \times \pi)(R)) = (X \times X) \setminus R$ offen, und so ist R abgeschlossen.

(c) Sei U in G offen. Wir müssen zeigen, dass $\pi(U) \subseteq G/H$ offen ist. $\pi(U)$ ist offen in G/H genau dann, wenn $\pi^{-1}(\pi(U))$ offen ist in G. Wir bemerken, dass $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{u \in U} uH = \bigcup_{h \in H} Uh$, wobei $Uh = \{uh \mid u \in U\}$. Wir zeigen, dass Ub offen ist für alle $b \in G$, denn dann ist $\pi^{-1}(\pi(U))$ als Vereinigung offener Mengen offen. Es ist $Ue = U$ offen. Da G eine topologische Gruppe ist, ist die Rechtsmultiplikationsabbildung $r_b\colon G \to G, a \mapsto ab$ ein Homöomorphismus (vgl. Vorlesung Woche 5). Damit ist auch $Ub = r_b(U)$ offen.

6. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und sei ∞ ein abstraktes Symbol ist, welches nicht in X enthalten ist. Wir definieren die *Einpunktkompaktifizierung* (auch Alexandroff-Kompaktifizierung genannt) $\widehat{X}$ von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_{\widehat{X}} := \mathcal{O}_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) \mid K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{X}$ ein kompakter topologischer Raum ist.

(b) Finden Sie für die Einpunktkompaktifizierung $\widehat{X}$ folgender topologischer Räume einen Teilraum eines $\mathbb{R}^m$, zu dem sie homöomorph sind:

(i) $X = [0, 1)$

(ii) $X = (0, 1)$

(iii) $X = [0, 1]$

(iv) $X = \mathbb{R}^n$

Lösung:

(a) Es ist relativ einfach zu sehen, dass $\left(\widehat{X}, \mathcal{O}_{\widehat{X}}\right)$ ein topologischer Raum ist. Für die Kompaktheit sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $\widehat{X}$. Dann gibt es ein $k \in I$ mit $\infty \in U_k$ und somit ist $U_k = \{\infty\} \cup (X \setminus K)$ für ein kompaktes und abgeschlossenes $K \subseteq X$. Dann ist

$$\bigcup_{i\in I\setminus\{k\}} U_i = \widehat{X} \setminus U_k = K$$

eine offene Überdeckung der kompakten Teilmenge K von X. Es gibt also eine endliche Teilüberdeckung dieser Menge und somit auch von $\widehat{X}$.

(b) Für (iii), es ist einfach zu sehen, dass $\widehat{X} \cong X + \{\infty\}$ für kompakte topologische Räume.

Für die andere Punkte, wir werden das folgendes benutzen:

Lemma. *Sei Y ein topologischer Raum, der Hausdorff und kompakt ist. Sei $y \in Y$ und $X := Y\setminus\{y\}$. Dann $\widehat{X} \cong Y$.*

Wir leiten daraus ab:

(i) $\widehat{X} \cong [0, 1]$

(ii) $\widehat{X} \cong S^1$

(iii) $\widehat{X} \cong [0, 1] \cup \{\infty\}$

(iv) $\widehat{X} \cong S^n$

In (iv) benutzen wir auch, dass $S^n \setminus \{e_n\} \cong \mathbb{R}^n$: dies ergibt sich aus der gleichen Konstruktion wie das Homöomorphismus $\mathbb{D}^n/{\sim} \cong S^n$.

Beweis des Lemmas. Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$f : \widehat{X} \to Y : p \mapsto \begin{cases} p & \text{wenn } p \in X; \\ y & \text{wenn } p = \infty. \end{cases}$$

Wir zeigen zuerst, dass f stetig ist. Sei $U \subset Y$ eine offene Menge. Wenn $y \notin U$, ist $U \subset X \subset Y$ eine offene Menge von X, darum ist $f^{-1}(U) = U \subset X \subset \widehat{X}$ auch offen. Wenn $y \in U$, ist $Y \setminus U$ eine abgeschlossene Menge von $X \subset Y$, die auch kompakt ist (weil eine abgeschlossene Menge in einem kompakten Raum auch kompakt ist). Darum ist $f^{-1}(Y \setminus U) = Y \setminus U \subset X \subset \widehat{X}$ kompakt und abgeschlossen. Nach der Definition der Topologie von $\widehat{X}$, ist

$$f^{-1}(U) = \widehat{X} \setminus f^{-1}(Y \setminus U) \subset \widehat{X}$$

offen.

Dann ist f eine stetige bijektive Abbildung vom kompakten Raum $\widehat{X}$ auf den Hausdorffraum Y. Daraus folgt durch das Homöomorphismuskriterium, dass f ein Homöomorphismus ist. $\square$