Lösungen zu Serie 5

Hinweis: Mit einem Stern (∗) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. Zeigen Sie, dass CX wegzusammenhängend ist.

   Lösung:

   Sei $p = [(x, 1)]$ für beliebiges $x \in X$ die „Spitze" des Kegels $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$. Wir zeigen, dass es von jedem beliebigen Punkt in CX einen Weg nach p gibt. Daraus folgt die Behauptung. Sei also $[(x, t)]$ ein beliebiger Punkt in CX und sei $\alpha\colon [0, 1] \to X \times [0, 1]$ definiert durch $s \mapsto (x, 1 + s(t - 1))$. Dann ist α offenbar stetig und somit ein Weg von $(x, 1)$ nach (x, t) in $X \times [0, 1]$. Verknüpft mit der Projektion $\pi\colon X \times [0, 1] \to CX$ erhalten wir einen Weg $\pi \circ \alpha$ in CX von p nach $[(x, t)]$ wie gewünscht.

2. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ den Kegel CS^n und die Suspension ΣS^n bis auf Homöomorphie.

   Lösung:

   Es gilt $CS^n \cong \mathbb{D}^{n+1}$ und $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   Für CS^n, sehen wir S^n als Untermenge von $\mathbb{D}^{n+1}$, und betrachten wir die Abbildung

   $$f : S^n \times [0, 1] \to \mathbb{D}^{n+1} : (x, t) \mapsto (1 - t)x.$$

   Die auf CS^n induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus: f ist stetig, die induzierte Abbildung ist bijektiv, CS^n ist kompakt, und $\mathbb{D}^{n+1}$ ist Hausdorff.

   Für ΣS^n, benutzen wir 3(a) und (b).

3. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$, $x \mapsto x$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ homöomorph zu S^n ist.

   Lösung:

   Wie betrachten die Abbildung

   $$g\colon \mathbb{D}^n + \mathbb{D}^n \to S^n,$$
   $$g(v) = \begin{cases} \left(v, \sqrt{1 - |v|^2}\right) & v \in \mathbb{D}^n + \emptyset \\ \left(v, -\sqrt{1 - |v|^2}\right) & v \in \emptyset + \mathbb{D}^n \end{cases}$$

   Die auf $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ induzierte Abbildung ist ein Homöomorphismus: g ist stetig, die induzierte Abbildung ist bijektiv, $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n$ ist kompakt, und S^n ist Hausdorff.

   (b) Sei X ein topologischer Raum und CX der Kegel über X. In welchem Sinne kann man CX mit CX verkleben, sodass man ΣX bekommt?

   Lösung:

   Sei $\varphi\colon X \times \{0\} \subseteq CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\} \to CX$ die Abbildung $(x, 0) \mapsto (x, 0)$. Dann ist $CX \cup_\varphi CX \cong \Sigma X$.

4. (a) Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie: Wenn G/H zusammenhängend ist und H (mit der Unterraumtopologie) zusammenhängend ist, dann ist G zusammenhängend.

Lösung:

Wir zeigen die folgende allgemeinere Aussage. Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation, sodass $X/\sim$ zusammenhängend ist (als Quotientenraum), und jede Äquivalenzklasse $[x] \subset X$ zusammenhängend ist (als Unterraum). Dann ist X zusammenhängend.

Angenommen $U, V \subset X$ sind disjunkte offene Mengen, und $U \cup V = X$. Für jedes $x \in X$, weil $[x]$ zusammenhängend ist, gilt $[x] \subset U$ oder $[x] \subset V$. Deshalb ist $\pi^{-1}\pi(U) = U, \pi^{-1}\pi(V) = V$, insbesondere sind $\pi(U)$ und $\pi(V)$ offen, und disjunkt. Weil $X/\sim$ zusammenhängend ist, gilt $\pi(U) = \varnothing$ ($\Rightarrow U = \varnothing$) oder $\pi(V) = \varnothing$ ($\Rightarrow V = \varnothing$).

(b) Zur Erinnerung: $O_n(\mathbb{R})$ ist für $n \in \mathbb{N}$ nicht zusammenhängend (warum?). Zeigen Sie, dass $SO_n(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist. *Hinweis:* Betrachten Sie eine Operation von $SO_n(\mathbb{R})$ auf S^{n-1}.

Lösung:

Wir zeigen die Aussage durch Induktion über n. Für $n = 1$ ist $SO_1(\mathbb{R}) = \{(1)\}$ offensichtlich zusammenhängend. Angenommen, die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, sei also $SO_n(\mathbb{R})$ zusammenhängend. Die Gruppe $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ wirkt via $(A, v) \mapsto Av$ auf S^n mit Stabilisator $(SO_{n+1}(\mathbb{R}))_{e_1} = SO_n(\mathbb{R})$ für $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$. Es gilt $(SO_{n+1}(\mathbb{R}))\, e_1 = S^n$ und somit $SO_{n+1}(\mathbb{R})/SO_n(\mathbb{R}) \cong S^n$ (vgl. Beispiel a) aus der Vorlesung in Woche 5). Da S^n zusammenhängend ist und nach Induktionsannahme auch $SO_n(\mathbb{R})$, folgt aus Teilaufgabe (a), dass auch $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist.

(c) Ist $SO_n(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend? $(*)$

Lösung:

Ja.

5. Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X. Zeigen Sie:

(a) Der Quotientenraum X/K ist ein Hausdorffraum.

Lösung:

Wir zeigen zuerst:

Lemma. *Sei X ein Hausdorff topologischer Raum, $K \subset X$ eine kompakte Menge, und $x \in X \setminus K$. Dann existieren offene disjunkte Mengen U_K, U_x sodass $K \subset U_K$ und $x \in U_x$.*

Beweis des Lemma. Für jedes $k \in K$, existieren offene disjunkte Mengen V_k, W_k sodass $k \in V_k$ und $x \in W_k$. Weil K kompakt ist, gibt es $k_1, \ldots, k_n \in K$ sodass $K \subset U_K := \bigcup V_{k_i}$. Dann gilt für U_K und $U_x := \bigcap W_{k_i}$ die Aussage. □

Bemerkung: Sie können ähnliches auch für zwei disjunkte kompakte Mengen zeigen.

Seien $[x] \neq [y] \in X/K$; insbesondere sind x und y nicht beide in K. Wenn $x, y \notin K$, wählen wir offene disjunkte Mengen $U_x, U_y \subset X$ sodass $x \in U_x, y \in U_y$. Dann haben $U_x \setminus K$ und $U_y \setminus K$ die gleiche Eigenschafte. Weil $\pi^{-1}\pi(U_x \setminus K) = U_x \setminus K$, und da gleiches für y gilt, sind $\pi(U_x \setminus K)$ und $\pi(U_y \setminus K)$ offene disjunkte Mengen von $X/\sim$ sodass $[x] \in \pi(U_x \setminus K)$ und $[y] \in \pi(U_y \setminus K)$.

Wenn $x \notin K$ und $y \in K$, wählen wir durch das Lemma offene disjunkte Mengen $U_x, U_K \subset X$ sodass $x \in U_x$ und $K \subset U_K$. Jetzt haben wir sofort $\pi^{-1}\pi(U_x) = U_x$ und $\pi^{-1}\pi(U_K) = U_K$, und das Argument lässt sich wie im ersten Fall abschliessen..

(b) Sei $A \subsetneq K$ eine offene Teilmenge von X. Dann ist die durch $f([x]_A) = [x]$ definierte Abbildung $f\colon (X \setminus A)/(K \setminus A) \to X/K$ wohldefiniert und ein Homöomorphismus. Hierbei bezeichnen $[x]_A$ und $[x]$ die Äquivalenzklassen in $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ bzw. X/K.

Lösung:

Sei $i : X \setminus A \to X$ die Inklusion, und $\pi_A : X \setminus A \to (X \setminus A)/(K \setminus A)$ und $\pi : X \to X/K$ die

Projektionen. Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \setminus A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_A"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ (X \setminus A)/(K \setminus A) \arrow[r, "f"] & X/K \end{tikzcd}$$

Weil i stetig ist, ist auch $\pi \circ i = \pi_A \circ f$ stetig, darum ist f stetig. Es ist leicht zu sehen, dass f bijektiv ist: hier benutzen wir, dass ein Punkt $x \in K \setminus A$ existiert, sodass $f([x]_A) = [x] = [K]$.

Wir müssen nur zeigen, dass f offen ist (wir können das Homöomorphismuskriterion nicht benutzen, weil es möglich ist, dass X nicht kompakt ist). Sei $U \subset (X \setminus A)/(K \setminus A)$ offen. Wir müssen zeigen dass $\pi^{-1}(f(U))$ offen ist.

Wenn $[x]_A \notin U$ für jede $x \in K \setminus A$, ist $\pi_A^{-1}(U) \subset X \setminus K$ offen. Aber $X \setminus K$ ist offen in X (weil X ist Hausdorff und K ist kompakt), darum ist $i(\pi_A^{-1}(U))$ auch offen, und $\pi^{-1}(f(U)) = i(\pi_A^{-1}(U))$ ist offen.

Angenommen $[K \setminus A]_A \in U$. Dann ist $i(\pi_A^{-1}(U) \cup A)$ in X offen (weil A offen ist) und darum ist $\pi^{-1}(f(U)) = i(\pi_A^{-1}(U) \cup A)$ auch offen.

(c) Die Aussage aus (b) stimmt nicht, wenn $A = K$ ist.

Lösung:

Wir betrachten $X = \{x, y\}$ mit eine beliebige Topologie und $A = K = \{x\}$. Dann hat $(X \setminus A)/(K \setminus A)$ ein Element, und X/K zwei Elemente.

(d) Angenommen, X ist kompakt. Dann ist X/K die Einpunktkompaktifizierung von $X \setminus K$. Die Einpunktkompaktifizierung wurde auf Serie 4 definiert.

Lösung:

In Serie 4, Aufgabe 6(b), haben wir gezeigt, dass wenn Z kompakt und Hausdorff ist, und $W := Z \setminus \{z\}$, dann gilt $\widehat{W} \cong Z$ (siehe die Lösungen von Serie 4). Hier nehmen wir $Z = X/K$, welches in der Tat kompakt (als Quotientenraum vom kompakten Raum X) und Hausdorff (siehe (a)) ist; und $z = [K]$, sodass $W = Z \setminus \{z\} = X/K \setminus [K] \cong X \setminus K$.

6. Zeigen Sie, dass das Möbiusband homotopieäquivalent zum Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ ist.

Lösung:

Das Möbiusband M wurde in der Vorlesung definiert als $M = [-1, 1] \times [0, 1]/\alpha$ für die Abbildung $\alpha\colon [-1, 1] \to [-1, 1], x \mapsto -x$. Wir behaupten, dass sowohl M als auch der Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ homotopieäquivalent zu S^1 sind, wobei wir hier $S^1 \cong [0, 1]/\sim$ für $0 \sim 1$ benutzen wollen. Eine Homotopieäquivalenz zwischen M und S^1 ist gegeben durch $f\colon M \to S^1, [(x, t)] \mapsto [t]$ mit Homotopieinverser $g\colon S^1 \to M, [t] \mapsto [(0, t)]$: Überzeugen Sie sich, dass die Abbildungen wohldefiniert und stetig sind. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{S^1}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_M$ mittels der Homotopie $M \times [0, 1] \to M, ([(x, t)], s) \to ([x \cdot s, t])$. Ähnlich konstruiert man eine Homotopieäquivalenz zwischen $S^1 \times [0, 1]$ und S^1, woraus die Behauptung folgt, da Homotopieäquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.