Lösungen zu Serie 6

Hinweis: Mit einem Stern (∗) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1.

Lemma (Verklebungslemma). *Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f\colon A \to Y$ und $g\colon B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h\colon X \to Y$ definiert durch*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ g(x), & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung: Diese Aussage lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.

(a) Zeigen Sie das Verklebungslemma.

(b) Sei X ein topologischer Raum und seien γ_0 und γ_1 zwei Wege in X mit $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$. Zeigen Sie, dass dann der Weg $\gamma_0\gamma_1$ stetig ist.

(c) Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.

Lösung:

Wegen $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ gibt es eine Homotopie $H_0\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H_0(s,0) = \gamma_0(s)$, $H_0(s,1) = \gamma_0'(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $H_0(0,t) = x, H_0(1,t) = y$ für alle $t \in [0,1]$. Da weiter $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ gilt, gibt es eine Homotopie $H_1\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ mit $H_1(s,0) = \gamma_1(s)$ und $H_1(s,1) = \gamma_1'(s)$ für alle $s \in [0,1]$ und $H_1(0,t) = y, H_1(1,t) = z$ für alle $t \in [0,1]$. Definiere

$$H\colon [0,1] \times [0,1] \to X, \quad H(s,t) = \begin{cases} H_0(2s,t), & \text{falls } s \in [0,1/2], \\ H_1(2s-1,t), & \text{falls } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Wegen $H_0(1,t) = H_1(0,t)$ für alle $t \in [0,1]$ ist H nach Teilaufgabe (a) wohldefniert und stetig. Weiter ist nach der Definition von $\gamma_0\gamma_1$ und $\gamma_0\gamma_1'$ offensichtlich, dass H eine Homotopie von $\gamma_0\gamma_1$ nach $\gamma_0\gamma_1'$ ist. Somit ist $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1$ bewiesen.

2. Zeigen Sie, dass $\{5\} \subset \mathbb{Q}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$ ist, aber kein Deformationsretrakt.

Lösung:

Die konstante Abbildung $\mathbb{Q} \to \{5\}, x \mapsto 5$ ist eine Retraktion, also $\{5\}$ ein Retrakt von $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ nicht wegzusammenhängend ist, folgt aus Aufgabe 5 (a) der zweite Teil der Aussage.

3. Betrachten Sie alle möglichen Topologien auf der zweielementigen Menge $\{a, b\}$. Welche dieser topologischen Räume sind kontrahierbar?

Lösung:

Es gibt vier verschiedene Topologien auf $X = \{a, b\}$:

- $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ (die triviale Topologie)

- $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$
- $\mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}$
- $\mathcal{O}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (die diskrete Topologie)

Bezüglich der diskreten Topologie ist X nicht zusammenhängend und kann also nach Aufgabe 5 (b) nicht homotopieäquivalent zu einem einpunktigen Raum sein. Wir betrachten die Abbildung

$$X \times [0,1] \to X,$$
$$(x,t) \mapsto \begin{cases} a, & \text{wenn } x = a \text{ oder } x = b, t = 1 \\ b, & \text{wenn } x = b, t < 1. \end{cases}$$

Es gilt $H(x,0) = x$ für alle $x \in X$ und $H(x,1) = a$ für alle $x \in X$. Nun ist H stetig, falls X mit der Topologie $\mathcal{O}_3$ oder der trivialen Topologie betrachtet wird, da dann $H^{-1}(\{b\}) = \{b\} \times [0,1) \subseteq X \times [0,1]$ offen ist bezüglich der Produkttopologie. In diesen Fällen ist H also eine Homotopie von der Identität auf X zur konstanten Abbildung $X \to X, x \mapsto a$ und X somit kontrahierbar/zusammenziehbar.
Für X mit der Topologie $\mathcal{O}_2$ müssen wir nur die Rollen von a und b in der Abbildung H vertauschen, ansonsten verläuft das Argument analog. Zusammengefasst ist X außer mit der diskreten Topologie immer kontrahierbar.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{S^n}, p \colon S^n \to S^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{S^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$.
   (a) Zeigen Sie für $n = 1$, dass p homotop zu id_{S^n} ist.
   (b) Zeigen Sie für alle ungeraden n, dass p homotop zu id_{S^n} ist.
   Lösung:
   Sei $n = 2k-1$ ungerade. Wir betrachten $S^n \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n$ und schreiben $\underline{x} = (x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$ für die Elemente von S^n. Sei $v : S^n \to S^n$ die folgende Abbildung:

$$v(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k) := (y_1, -x_1, \ldots, y_k, -x_k).$$

   Wir bemerken, dass v stetig ist, und dass $\langle \underline{x}, v(\underline{x}) \rangle = 0$ für alle $\underline{x} \in S^n$, wo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ steht fürs Skalarprodukt in $\mathbb{R}^{n+1}$.
   Wir definieren die Homotopie $H \colon S^n \times [0,1] \to S^n$ mithilfe v durch die folgende Formel:

$$H(\underline{x}, t) := \cos(\pi t)\underline{x} + \sin(\pi t) v(\underline{x}).$$

   Es ist leicht zu sehen, dass H ist wohldefiniert (überprüfen Sie, dass $H(\underline{x}, t) \in S^n$), stetig, und dass $H(\underline{x}, 0) = \underline{x}$, $H(\underline{x}, 1) = -\underline{x}$ für alle $\underline{x} \in S^n$.

   Bemerkung: Der Beweis benutzt die Existenz einer stetigen Abbildung $v \colon S^n \to S^n$ mit $\langle \underline{x}, v(\underline{x}) \rangle = 0$ für alle $\underline{x} \in S^n$. Solch ein v heisst unitäre Vektorfeld. *Es existiert nicht in S^n für gerade n (dieser Satz ist* Hairy Ball Theorem *genannt).*

5. (a) Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X kontrahierbar ist genau dann, wenn für jeden wegzusammenhängenden topologischen Raum Y und jedes Paar von stetigen Funktionen $f, g \colon X \to Y$ gilt, dass f und g homotop sind.
   (b) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X kontrahierbar ist genau dann, wenn für jeden topologischen Raum Y und jedes Paar stetiger Funktionen $f, g \colon Y \to X$ gilt, dass f und g homotop sind.

Lösung:

(a) Angenommen X ist kontrahierbar: sei $x_0 \in X$ sodass es existiert $H : X \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen id_X und die konstante Abbildung c_{x_0}, d.h. $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = x_0$ für jede $x \in X$. Sei ein Y wegzusammenhängenden topologischen Raum und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Sei $\gamma : [0,1] \to Y$ ein stetiger Weg in Y zwischen $f(x_0)$ und $g(x_0)$. Dann ist die folgende Abbildung eine Homotopie zwischen f und g:

$$F : X \times [0,1] \to Y : (x,s) \mapsto \begin{cases} f(H(x,3s)) & \text{wenn } s \in [0,1/3] \\ \gamma(3s-1) & \text{wenn } s \in [1/3,2/3] \\ g(H(x,3-3s)) & \text{wenn } s \in [2/3,1]\,. \end{cases}$$

Umgekehrt: Angenommen X hat die Eigenschaft der Aufgabe. Wir betrachten $Y = X, f = id_X$ und $g = c_{x_0}$. Die Hypothese gibt eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to X$ mit $H(x,0) = x$ und $H(x,1) = x_0$ für jede $x \in X$. Darum ist X kontrahierbar.

(b) Angenommen X ist kontrahierbar und sei noch $x_0 \in X$ und $H : X \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen id_X und die konstante Abbildung c_{x_0}. Sei ein Y topologischen Raum und $f, g : Y \to X$ stetige Abbildungen. Dann ist die folgende Abbildung eine Homotopie zwischen f und g:

$$F : Y \times [0,1] \to X : (y,s) \mapsto \begin{cases} H(f(y),2s) & \text{if } s \in [0,1/2] \\ H(g(y),2s-1) & \text{if } s \in [1/2,1]\,. \end{cases}$$

Umgekehrt: Angenommen X hat die Eigenschaft der Aufgabe. Wir betrachten $Y = X, f = id_X$ und $g = c_{x_0}$, und argumentieren wie im Aufgabe (a).

6. Seien X und Y homotopieäquivalente Räume.
   (a) Zeigen Sie, dass X wegzusammenhängend ist genau dann, wenn Y wegzusammenhängend ist.
   (b) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist genau dann, wenn Y zusammenhängend ist.
   (c) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz. Bezeichne $[z]_Z$ und $[z]_W$ die Zusammenhangs- bzw. die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes z in X oder Y. Zeigen Sie, dass $[z]_Z \mapsto [f(z)]_Z$ und $[z]_W \mapsto [f(z)]_W$ Bijektionen zwischen den Zusammenhangskomponenten bzw. den Wegzusammenhangskomponenten von X und Y definieren. $(*)$

Lösung:

(a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und sei $g\colon Y \to X$ die Homotopieinverse von f, d.h. es gilt $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. Angeonmmen, X ist wegzusammenhängend. Dann ist auch $f(X) \subseteq Y$ wegzusammenhängend und es genügt für jeden Punkt in Y einen Pfad zu einem Punkt in $f(X)$ zu finden. Sei $H\colon Y \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie zwischen $f \circ g$ und id_Y, es gilt also $H(y,0) = f(g(y))$ und $H(y,1) = y$ für alle $y \in Y, t \in [0,1]$. Weiter sei nun $y \in Y$ beliebig. Dann ist $z := f(g(y)) \in f(X)$ und $[0,1] \to Y, t \mapsto H(y,t)$ definiert einen Pfad von z nach y, woraus die Behauptung folgt.

(b) Sei $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser g wie in (a) und H wiederum eine Homotopie zwischen $f \circ g$ und id_Y. Angenommen, X ist zusammenhängend und es gelte $Y = U \cup V$ für disjunkte, offene Mengen $U, V \subseteq Y$. Dann ist $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ die Verenigung zweier disjunkter offener Teilmengen von X, also muss nach Voraussetzung (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $f^{-1}(U) = \emptyset$ sein. Wir behaupten, dass daraus $U = \emptyset$ folgt. Zunächst bemerken wir, dass $(f \circ g)(Y) \subseteq V$ gilt. Sei $y \in Y$. Dann ist wiederum $[0,1] \to Y, t \mapsto H(y,t)$ ein Pfad von $f(g(y))$ nach y. Wegen $f(g(y)) \in V$ haben wir somit einen Pfad von y zu einem Punkt in V gefunden und es muss $y \in V$ gelten. Somit gilt für alle $y \in Y$, dass $y \in V$ ist, also $U = \emptyset$ wie gewünscht.

7. Zeigen Sie, dass $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ ein starker Deformationsretrakt ist. *Hinweis:* Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren.

   Lösung:

   Das Gram-Schmidt-Verfahren kann als Rechtsmultiplikation mit einer Oberendreiecksmatrix mit positiven diagonal Einträgen verstanden werden. Desweiteren hängen die Einträge dieser Matriz, sie sei mit $GS(A)$ bezeichnet, stetig von der zu orthogonalisierenden Matrix A in $GL_n(\mathbb{R})$ ab. D.h. wir können eine Retraktion durch
   $$GL_n(\mathbb{R}) \to O_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A * GS(A)$$
   definieren. Dies ist eine starke Deformationsretraktion, weil
   $$GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) : A \mapsto A * GS(A)$$
   via folgender Homotopie homoptop zur Identität ist:
   $$h : GL_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \to GL_n(\mathbb{R}) : (A,t) \mapsto A * ((1-t)GS(A) + tI_n).$$
   (Sie könner eine detaillierte Lösung hier finden: `https://www.mathematik.hu-berlin.de/~wendl/pub/Kraushar.pdf`, Lemma 2.3.13)

8. Finden Sie einen kontrahierbaren topologischen Raum X und einen Punkt $x \in X$, so dass $\{x\}$ kein starker Deformationsretrakt von X ist. $(*)$