Lösungen zu Serie 7

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig. Aufgaben mit einem (A) kennzeichnen besonders abstrakte Aufgaben (siehe Aufgabe 5).

1. Beweisen Sie folgendes Lemma über die Funktorialität der Fundamentalgruppe.

   Lemma. *Seien X, Y topologische Räume. Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in X$ beliebig und $y_0 \in Y$ mit $f(x_0) = y_0$. Dann definiert $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ einen Gruppenhomomorphismus. Des Weiteren gilt:*

   1. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

   2. Sei Z ein topologischer Raum, $g : Y \to Z$ stetig und $z_0 \in Z$ mit $z_0 = g(y_0) = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, wobei $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Z, z_0)$ und $(g \circ f)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.

   Lösung:

   0) Für $f\colon X \to Y$ stetig ist zu zeigen, dass

   $$f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, f(x_0)), \quad [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

   ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit von f_*: Falls $[\alpha] = [\alpha']$ gilt, so ist $\alpha \simeq \alpha'$ rel x_0 via einer Homotopie h. Damit gilt $f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha'$ rel $f(x_0)$ via $f \circ h$ und insbesondere $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha']$. Wir zeigen noch, dass f_* ein Gruppenhomomorphismus ist: Es gilt

   $$f_*([\alpha][\beta]) = f_*([\alpha\beta]) = [f \circ \alpha\beta] = [(f \circ \alpha)(f \circ \beta)] = [(f \circ \alpha)][f \circ \beta] = f_*([\alpha])g_*([\beta]),$$

   wobei wir in der dritten Gleichung $f \circ \alpha\beta = (f \circ \alpha)(f \circ \beta)$ benutzen (was sich leicht mit der Definition der Verknüpfung von Wegen prüfen lässt).

   1) Es gilt $[\mathrm{id}_X \circ \alpha] = [\alpha]$ für alle Schleifen α an x_0.

   2) Seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig und $x_0 \in X$. Wir betrachten die Gruppenhomomorphismen $f_*\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ und $g_*\colon \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Z, g(f(x_0)))$, wie in 0) definiert, und zeigen $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$: Es gilt für alle Schleifen α an x_0:

   $$(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])).$$

2. Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt mit Retraktion $\rho\colon X \to A$ und bezeichne $i\colon A \to X$ die Inklusion. Sei $a \in A \subseteq X$.

   (a) Zeigen Sie, dass $i_*\colon \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv ist und $\rho_*\colon \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv ist.

   (b) Angenommen ρ ist ein starker Deformationsretrakt. Zeigen Sie, dass dann i_* und ρ_* zueinder inverse Gruppenisomorphismen sind.

   Lösung:

   (a) Es gilt $\rho \circ i = \mathrm{id}_A$ und somit für die induzierten Homomorphismen

   $$\rho_* \circ i_* = (\rho \circ i)_* = (\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)}\,.$$

   Also ist i_* injektiv und ρ_* surjektiv.

(b) Nach Voraussetzung gibt es eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to X$ zwischen $X \to X$, $x \mapsto \rho(x)$ und id_X, sodass $H(a,t) = a$ für alle $a \in A$, $t \in [0,1]$ gilt. Für $[\gamma] \in \pi_1(X,a)$ definiert dann $H(\gamma(\cdot),\cdot)$ auch eine Homotopie zwischen der Schleife $\alpha\colon [0,1] \to A, s \mapsto H(\gamma(s),0) = \rho(\gamma(s)) \in A$ und $\gamma\colon [0,1] \to X$; diese Homotopie ist wegen $\gamma(0) = \gamma(1) = a \in A$ relativ Endpunkte. Wegen $\rho \circ \alpha = \alpha$ gilt also $i_*\rho_*([\gamma]) = i_*\rho_*([\alpha]) = i_*([\alpha]) = [\alpha] = [\gamma]$, also $i_* \circ \rho_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,a)}$ und somit mit Teil (a) die Behauptung.

Hinweis: Zum Zeitpunkt an dem diese Aufgabe gestellt wurde, stand Ihnen der Satz 3 aus Woche 8 (Falls f eine Homotopieäquivalenz ist, dann ist f_* ein Gruppenisomorphismus) noch nicht zur Verfügung. Entsprechend wird dies in obiger Lösung auch nicht benutzt. Unter Benutzung von Satz 3 folgt die Aussage (auch für Deformationsretrakte, statt nur für starke Deformationsretrakte) sehr schnell: Nach Satz 3 sind ρ_* und ι_* Gruppenisomorphismen, weil ρ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinverser ι ist (siehe Lemma 1 aus Woche 5). Sie sind zueinander inverse, weil $\rho_* \circ \iota_* = (\rho \circ \iota)_* = (id_A)_*$.

3. (a) Seien X und Y topologische Räume und $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Finden Sie einen (kanonischen) Gruppenisomorphismus zwischen $\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0))$ und $\pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$.

(b) Sei $X = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in X$ beliebig. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\pi_1(X,x_0)$. *Hinweis: Sie dürfen hier benutzen, dass für $n = 1$, $\pi_1(X,x_0)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Diese Aussage wird in der Vorlesung noch gezeigt.*

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\phi\colon \pi_1\big(X \times Y, (x_0,y_0)\big) \to \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0), \quad [\gamma] \mapsto \big([\pi_X \circ \gamma], [\pi_Y \circ \gamma]\big)$$

ein Gruppenisomorphismus ist, wobei π_X und π_Y die Projektionsabbildungen auf X beziehungsweise Y bezeichnen.

Offenbar ist ϕ wohldefiniert, denn wenn $[\gamma_0] = [\gamma_1]$ gilt, so gibt es eine Homotopierel Endpunkte γ_t von γ_0 nach γ_1. Da die Projektionsabbildungen stetig sind, sind auch $\pi_X \circ \gamma_t$ und $\pi_Y \circ \gamma_t$ Homotopien rel Endpunkte von $\pi_X \circ \gamma_0$ nach $\pi_X \circ \gamma_1$ beziehungsweise von $\pi_Y \circ \gamma_0$ nach $\pi_Y \circ \gamma_1$. Folglich ist $([\pi_X \circ \gamma_0], [\pi_Y \circ \gamma_0]) = ([\pi_X \circ \gamma_1], [\pi_Y \circ \gamma_1])$.

ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus, da

$$\begin{aligned}
\phi([\gamma_0] \cdot [\gamma_1]) &= \phi([\gamma_0 \cdot \gamma_1]) = ([\pi_X \circ (\gamma_0 \cdot \gamma_1)], [\pi_Y \circ (\gamma_0 \cdot \gamma_1)]) \\
&= ([(\pi_X \circ \gamma_0) \cdot (\pi_X \circ \gamma_1)], [(\pi_Y \circ \gamma_0) \cdot (\pi_Y \circ \gamma_1)]) \\
&= ([\pi_X \circ \gamma_0] \cdot [\pi_X \circ \gamma_1], [\pi_Y \circ \gamma_0] \cdot [\pi_Y \circ \gamma_1]) \\
&= ([\pi_X \circ \gamma_0], [\pi_Y \circ \gamma_0]) \cdot ([\pi_X \circ \gamma_1], [\pi_Y \circ \gamma_1]) \\
&= \phi([\gamma_0]) \cdot \phi([\gamma_1]) .
\end{aligned}$$

Weiter ist ϕ surjektiv. Denn ist $([\gamma_0], [\gamma_1]) \in \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0)$, so ist

$$\gamma(t) := (\gamma_0(t), \gamma_1(t))$$

eine Schleife in $X \times Y$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = (x_0,y_0)$ und $\phi([\gamma]) = ([\gamma_0], [\gamma_1])$.

Es bleibt die Injektivität zu zeigen.
Seien dazu $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1\big(X \times Y, (x_0,y_0)\big)$. Wir schreiben $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t))$ und $\gamma'(t) = (\gamma_0'(t), \gamma_1'(t))$. Dann ist $\phi([\gamma]) = ([\gamma_0], [\gamma_1])$ und $\phi([\gamma']) = ([\gamma_0'], [\gamma_1'])$. Sei nun $\phi([\gamma]) = \phi([\gamma'])$. Dann gibt es Homotopien $h_{0,t}$, $h_{1,t}$ rel Endpunkte, wobei $h_{0,t}$ eine Homotopie rel Endpunkte in X von γ_0 nach γ_0' und $h_{1,t}$ eine Homotopie rel Endpunkte in Y von γ_1 nach γ_1' ist. Somit ist jedoch $H_t(s) := (h_{0,t}(s), h_{1,t}(s))$ eine Homotpie rel Endpunkte von γ nach γ', womit $[\gamma] = [\gamma']$ gilt.

(b) Aus iterativer Anwendung von Teilaufgabe (a) folgt $\pi_1(X,x_0) \cong \mathbb{Z}^n$.

4. Sei $\mathcal{E}$ die Kategorie mit Objekten den Euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und Morphismen $\mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ den glatten Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, die den Ursprung auf den Ursprung senden, mit der üblichen Verknüpfung von Funktionen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\mathcal{F}$, die jedem $\mathbb{R}^n$ sich selbst und jedem $f \in \mathrm{Mor}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ das Differential $Df(0)$ von f im Ursprung zuordnet, einen kovarianter Funktor von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ definiert.

   Lösung:

   Die Aussage folgt leicht aus den aus der Analysis bekannten Rechenregeln zur mehrdimensionalen Differentialrechnung, insbesondere aus der Kettenregel.

5. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch folgendes Tripel von Daten: (A)

   - $\mathrm{Ob}(\mathcal{U})$ ist die Klasse der kleinen Kategorien, d.h.

     $$\mathrm{Ob}(\mathcal{U}) = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ ist eine Kategorie, für welche } \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \text{ eine Menge ist}\},$$

   - $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ist die Menge der kovarianten Funktoren von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$,
   - $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times \mathrm{Mor}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ ist durch Nacheinanderausführen von Funktoren gegeben.

   Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ eine Kategorie bildet.

6. Finden Sie eine stetige Surjektion $S^1 \to S^2$. Können Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine stetige Surjektion $S^m \to S^n$ finden? $(*)$

[0] Für eine Homotopie $H\colon X \times [0,1] \to Y$ setzen wir dabei wie üblich $h_t\colon X \to Y, h_t(x) = H(x,t)$.