Lösungen zu Serie 8

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ mit $f(0,0) = (2,0)$ gibt.

   Lösung:

   Sei $f\colon \mathbb{R}^2\setminus S^1 \to \mathbb{R}^2\setminus S^1$ ein Homöomorphismus. Wir wollen benutzen, dass $\mathbb{R}^2\setminus S^1$ zwei Zusammenhangskomponenten hat. Es bezeichne A die unbeschränkte und B die beschränkte Zusammenhangskomponente (sodass B der offenen Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ entspricht). Weil f ein Homöomorphismus ist, werden die beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ von f entweder beibehalten oder vertauscht. Wenn $f(0,0) = (2,0)$ gilt, dann muss f die beiden Zusammenhangskomponenten A and B wegen $(0,0) \in B$ und $(2,0) \in A$ vertauschen. Insbesondere ist dann $f|_B\colon B \to A$ ein Homöomorphismus. Dies ist jedoch unmöglich, denn die Fundamentalgruppe von B ist trivial, während $\pi_1(A) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ist, da S^1 ein Deformationsretrakt von A ist.

2. Seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$.

   (a) Sei β eine Schleife an x_0. Beschreiben Sie die Abbildung

   $$\Psi_\beta\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0), \quad [\alpha] \mapsto [\beta(\alpha\beta^-)],$$

   (vgl. Eigenschaft i) aus Woche 8) mit Begriffen aus der Gruppentheorie.

   Lösung:

   Es gilt $\Psi_\beta([\alpha]) = [\beta(\alpha\beta^-)] = [\beta][\alpha][\beta^-] = [\beta][\alpha][\beta]^{-1}$, also entspricht Ψ_β der Konjugation mit $[\beta]$.

   (b) Sei Y ein topologischer Raum, sei $y_0 \in Y$ und seien $f, g\colon X \to Y$ homotope Abbildungen mit $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Was können Sie über $f_*, g_*\colon \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ aussagen?

   Lösung:

   Wegen dem Lemma nach Satz 3 aus der Vorlesung in Woche 8 existiert ein Weg β von $f(x_0) = y_0$ nach $g(x_0) = y_0$, also eine Schleife an y_0, mit $f_* = \Psi_\beta \circ g_*$. Wegen Teilaufgabe (a) gilt dann also $f_*(a) = [\beta]g_*(a)[\beta]^{-1}$ für alle $a \in \pi_1(X,x_0)$.

   (c) Finden Sie Abbildungen f, g wie in (b), sodass $f_* \neq g_*$ gilt. ($*$)

3. Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leq r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt. Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

   Lösung:

   Wir nehmen an, dass f nicht surjektiv ist, und betrachten die induzierte Abbildung $\bar{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei ohne Einschränkung $0 \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt sei, der unter f kein Urbild hat. Wir betrachten nun den induzierten Gruppenhomomorphimus $\bar{f}_*\colon \pi_1(\mathbb{R}^2,(2r,0)) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f(2r,0))$ und die Schleife $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (2r\cos(t), 2r\sin(t))$. Nach Voraussetzung gilt $f(\alpha(t)) \notin K_r(0)$ für alle $t \in [0,1]$ und $f \circ \alpha$ ist (via der linearen Homotopie) homotop rel $f(2r,0)$ zur Schleife an $f(2r,0)$, die den Kreis vom Radius $|f(2r,0)|$ um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn durchläuft. Somit gilt $\bar{f}_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] \neq 0 \in \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, (f(2r,0))$. Dies steht wegen $\pi_1(\mathbb{R}^2,(2r,0)) \cong \{1\}$ (da $\mathbb{R}^2$ kontrahierbar ist) im Widerspruch dazu, dass $\bar{f}_*$ ein Gruppenhomorphismus ist.

4. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist genau dann, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.

Lösung:

Wir nehmen zunächst an, dass X einfach zusammenhängend ist. Seien $x, y \in X$ zwei Punkte und α, β zwei Wege von x nach y. Nach Voraussetzung gilt $\pi_1(X,x) \cong \pi_1(X,y) \cong \{1\}$ und daher $\beta^-\beta \simeq \mathrm{konst}_y$ rel y und $\alpha\beta^- \simeq \mathrm{konst}_x$ rel x. Daraus folgt $\alpha \simeq \alpha\,\mathrm{konst}_y \simeq \alpha\beta^-\beta \simeq \mathrm{konst}_x\,\beta \simeq \beta$ rel Endpunkte. Da α und β beliebig waren, gibt es also eine eindeutige Homotopieklasse von Pfaden von x nach y.

Umgekehrt nehmen wir an, dass es für alle $x, y \in X$ eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet. Sei $x \in X$. Dann gibt es eine eindeutige Homotopieklasse von Pfaden von x nach x. Also sind alle Schleifen an x homotop (rel x) und es gilt $\pi_1(X,x) = \{1\}$.

5. Sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $\pi_1(G,e)$ kommutativ ist.

Lösung:

Seien $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(G,e)$ und bezeichne $\circ\colon G \times G \to G$ die Multiplikation der Gruppe G. Bezeichne auch $\alpha \circ \beta$ die Schleife $[0,1] \to G : t \mapsto \alpha(t) \circ \beta(t)$. Wir bemerken, dass $\circ$ eine Multiplikation auf $\pi_1(G,e)$ definiert. Dies gilt, weil im Allgemeinen folgendes gilt: Falls $k : Y \times Z \to W$, $f, f' : X \to Y$ und $g, g' : X \to Z$ stetig sind und $f \simeq f', g \simeq g'$, dann $[x \mapsto k(f(x), g(x))] \simeq [x \mapsto k(f'(x), g'(x))]$ (und auch rel. Endpunkte wenn $X = [0,1]$). Wir werden zeigen, dass $[\alpha] * [\beta] = [\alpha] \circ [\beta] = [\beta] * [\alpha]$, wobei $*$ die übliche Multiplikation in $\pi_1(G,e)$ bezeichnet.

Per Definition gilt

$$(\alpha * \mathrm{konst}_e) \circ (\mathrm{konst}_e * \beta) = \alpha * \beta.$$

Ausserdem gilt $(\alpha * \mathrm{konst}_e) \circ (\mathrm{konst}_e * \beta) \simeq \alpha \circ \beta$, weil $\alpha \simeq (\alpha * \mathrm{konst}_e)$ und $\beta \simeq (\mathrm{konst}_e * \beta)$. Andererseits gilt auch

$$\alpha \circ \beta \simeq (\mathrm{konst}_e * \alpha) \circ (\beta * \mathrm{konst}_e) = \beta * \alpha,$$

also folgt $\alpha * \beta \simeq \alpha \circ \beta \simeq \beta * \alpha$ und damit die Behauptung.

6. Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist. Dies folgt direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Homotopieäquivalenzen, kann aber in diesem Spezialfall auch direkt gezeigt werden.

Lösung:

Wir bemerken zuerst, dass X wegzusammenhängend ist. Sei $H : X \times [0,1] \to X$ eine Homotopie zwischen id_X und eine konstante Abbildung: $H(x,0) = x, H(x,1) = x_0 \in X$ für jede $x \in X$ und ein $x_0 \in X$. Eine solche Abbildung existiert, weil X kontrahierbar ist. Dann ist $H(x,\cdot)$ ein Weg von x nach x_0: darum enthält die Wegzusammenhangkomponente von x_0 jedes $x \in X$.

Wir zeigen zunächst, dass $\pi_1(X,x_0) \cong \{1\}$. Sei $\gamma : [0,1] \to X$ eine Schleife an x_0. Wir können durch H eine Homotopie (nicht unbedingt rel. x_0) zwischen γ und die konstante Schleife c_{x_0} definieren:

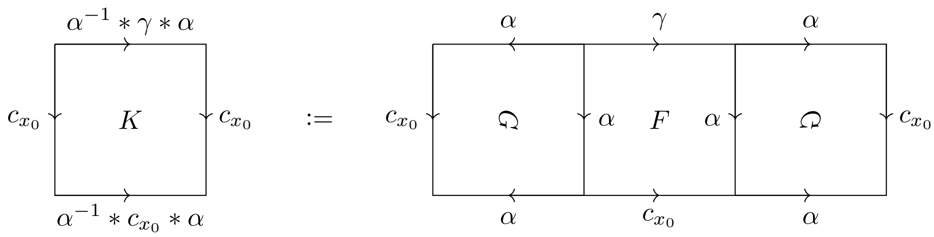
$$F\colon [0,1] \times [0,1] \to X; \quad F(s,t) := H(\gamma(s),t).$$

Dann definiert F eine Schleife an x_0:

$$\alpha(t) := F(0,t) = H(x_0,t) = F(1,t).$$

Jetzt betrachten wir die Homotopie $G : [0,1] \times [0,1] \to X$ definiert durch $G(s,t) := H(\alpha(s),t)$; und die Homotopie $K : [0,1] \times [0,1] \to X$ definiert durch:

$$K(s,t) = \begin{cases} G(t, 1-3s) & \text{if } s \in [0,1/3] \\ F(3s-1, t) & \text{if } s \in [1/3, 2/3] \\ G(t, 3s-2) & \text{if } s \in [2/3, 1]\,. \end{cases}$$



Wegen des Verklebungslemmas ist K stetig, $K(\cdot, 0) = \alpha^{-1} * \gamma * \alpha$, $K(\cdot, 1) = \alpha^{-1} * c_{x_0} * \alpha$ und $K(0, t) = K(1, t) = x_0$ für jede $t \in [0, 1]$. Dass heisst, K ist eine Homotopie zwischen $\alpha^{-1} * \gamma * \alpha$ und $\alpha^{-1} * c_{x_0} * \alpha$, rel. x_0. Darum:

$$[\alpha^{-1} * \gamma * \alpha] = [\alpha^{-1} * c_{x_0} * \alpha] \implies [\gamma] = [\alpha] \cdot [\alpha^{-1} * c_{x_0} * \alpha] \cdot [\alpha^{-1}] = [c_{x_0}];$$

und $\pi_1(X, x_0) = \{[c_{x_0}]\} = \{1\}$.

<u>Rätsel:</u> Gegeben sei ein Bilderrahmen und ein Faden, der an seinen Enden am Bilderrahmen befestigt ist. In der Wand seien zwei Nägel eingeschlagen. Können Sie den Bilderahmen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass er sicher herunterfällt, sobald Sie einen der beiden Nägel aus der Wand ziehen?

Lösung:
Hinweis: Seien a und b die beiden Erzeuger von $\pi_1(X)$ für $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ (siehe Beispiel f) im Abschnitt § Der Satz von Seifert van Kampen). Studieren Sie $aba^{-1}b^{-1}$.