Lösungen zu Serie 9

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Seien H und K Gruppen.

   (a) Zeigen Sie: Falls alle Elemente von $H \setminus \{1\}$ und $K \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung haben, dann haben auch alle Elemente von $(H * K) \setminus \{1\}$ unendliche Ordnung. Schließen Sie daraus, dass $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ nicht isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ist.

   Lösung:

   Wir betrachten ein reduziertes Wort w in $H * K$ und nehmen an, dass es endliche Ordnung n hat. Wenn w gerade Länge hat, dann muss w^n ebenfalls reduziert sein, und kann darum nur das triviale Wort sein, wenn w trivial war. Wenn w ungerade Länge hat, dann können wir Potenzen von w reduzieren und Induktion zeigt, dass w^n von der Form a^n sein muss für ein a in H oder K. So ein Element ist allerdings nur trivial, falls a und somit w trivial war.

   (b) Gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von $H * K$ nach $H \times K$?

   Lösung:

   Die Inklusionen $H \to H \times K$ und $K \to H \times K$ induzieren einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon H * K \to H \times K$ mit $\varphi(h) = (h, 1)$ und $\varphi(k) = (1, k)$ für alle $h \in H, k \in K$ (wegen der universellen Eigenschaft des freien Produkts $H * K$). Es gilt somit $\varphi(h * k) = (h, 1) \cdot (1, k) = (h, k)$ für alle $h \in H, k \in K$ und φ ist somit surjektiv.

2. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des projektiven Raums $\mathbb{RP}^2$ (vgl. Aufgabe 4 von Serie 4).

   Lösung:

   Der reelle projektive Raum wurde in Serie 4 Aufgabe 4b) wie folgt definiert. Wir betrachten die zweidimensionale Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{D}^2$, die die Antipoden auf ihrem Rand identifiziert, d.h. $u \sim v :\Leftrightarrow u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial\mathbb{D}^2$. Der topologische Raum $\mathbb{RP}^2$ ist dann der Quotientenraum $\mathbb{RP}^2 := \mathbb{D}^2/\sim$. Wir lösen diese Aufgabe mit dem Satz von Seifert und van Kampen. Sei $A = \mathbb{RP}^2 \setminus \{[(0,0)]\}$ und sei $B = \{[(x,y)] \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Die Mengen A und B sind offen, der Schnitt $A \cap B = \{[(x,y)] \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ ist wegzusammenhängend und $A \cup B = \mathbb{RP}^2$. Die Teilmenge A ist homotopieäquivalent zu S^1, also ist $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$, und für die Teilmenge B gilt $\pi_1(B) = \{e\}$. Ähnlich ist auch $A \cap B$ homotopieäquivalent zu S^1, also ist $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$. Die Abbildung $\iota : \mathbb{Z} \cong \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ ist gegeben durch $\iota(a) = a^2$, wobei a der Erzeuger von $\mathbb{Z}$ ist. Also ist $N = \langle\langle a^2 \rangle\rangle$. Also ist $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong (\mathbb{Z} * \{e\})/N = \mathbb{Z}/N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Zeigen Sie (mit den universellen Eigenschaften des freien Produktes und der freien Gruppe mit zwei Erzeugern), dass F_2, die freie Gruppe mit zwei Erzeugern (vgl. Algebra 1), isomorph zu $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ ist.

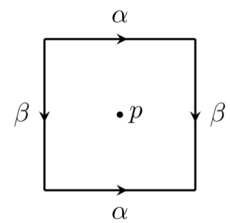
   Lösung:

   Seien a, b die Erzeuger der freien Gruppe F_2. Wir schreiben $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ als $H*K$, um die beiden Kopien von $\mathbb{Z}$ im freien Produkt unterscheiden zu können. Wir schreiben weiter e_H und e_K für die neutralen Elemente von $H = \mathbb{Z}$ und $K = \mathbb{Z}$. Wegen der universellen Eigenschaft des freien Produktes gibt es nun einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z}*\mathbb{Z} = H*K \to F_2$ mit $\varphi(e_H) = a$ und $\varphi(e_K) = b$. Andererseits impliziert die universelle Eigenschaft der freien Gruppe F_2, dass es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus $\psi\colon F_2 \to H * K$ mit $\psi(a) = e_H$ und $\psi(b) = e_K$ gibt. Für die Verkettungen dieser Homomorphismen gilt nun $\varphi \circ \psi\colon a \mapsto a, b \mapsto b$ und $\psi \circ \varphi\colon e_H \mapsto e_H, e_K \mapsto e_K$. Die Eindeutigkeit in der jeweiligen universellen Eigenschaft impliziert nun, dass $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{F_2}$ und $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}*\mathbb{Z}}$ gelten muss und damit die Behauptung.

4. Benutzen Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die folgenden Fundamentalgruppen zu bestimmen:
   (a) $\pi_1(T^2)$, wobei T^2 den Torus bezeichnet,
   (b) $\pi_1(K)$, wobei K die Kleinsche Flasche bezeichnet.

Lösung:

(a) Wir beschreiben den Torus als Quotientenraum. Sei $Q := [-1,1] \times [-1,1]$, dann ist $T^2 := Q/\sim$, wobei $(x,-1) \sim (x,1)$ und $(-1,y) \sim (1,y)$ für jede $x, y \in [-1,1]$ (siehe unten).



Sei $p := [(0,0)] \in T^2$. Wir nehmen $x_0 := [(0,1/2)]$ als Basispunkt, und betrachten die Überdeckung $T^2 = A \cup B$ wobei $A := T^2 \setminus \{p\}$ und $B := \operatorname{int}(Q)/\sim \subset Q/\sim$, und benutzen den Satz von Seifert und van Kampen. Natürlich ist $B = \operatorname{int}(Q)/\sim \cong \operatorname{int}(Q)$ einfach zusammenhängend. Deshalb, mussen wir nur $\pi_1(A)$ und $\pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$ rechnen.

Die Grenze ∂Q ist ein starker Deformationsretrakt von Q, deshalb ist $\pi_1(A) = \pi_1((Q/\sim) \setminus \{p\}) \cong \pi_1(\partial Q/\sim)$. Aber $\partial Q/\sim \cong S^1 \vee S^1$; daher:

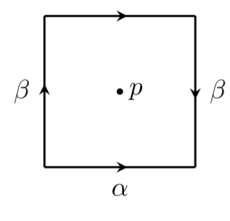
$$\pi_1\left(T^2 \setminus \{p\}\right) = \pi_1\left(\partial Q/\sim\right) = \pi_1\left(S^1 \vee S^1\right) = \pi_1\left(S^1\right) * \pi_1\left(S^1\right) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

durch den Satz von Seifert und van Kampen. Die zwei Erzeugern können wir explizit beschreiben: $\pi_1(T^2 \setminus \{p\}) \cong \langle a \rangle * \langle b \rangle$, wobei $a = [\gamma\alpha\gamma^-], b = [\gamma\beta\gamma^-]$, und $\alpha, \beta : [0,1] \to A$ sind wie in der Abbildung, und $\gamma : [0,1] \to A$ ist eine Schleife von x_0 nach $[(\pm 1, \pm 1)]$ (der Basispunkt von α und β).

Schliesslich rechnen wir $A \cap B = (-1,1) \times (-1,1) \setminus \{(0,0)\}/\sim \cong (-1,1) \times (-1,1) \setminus \{(0,0)\}$. Also ist $A \cap B$ wegzusammenhängend und enthält $1/2 \cdot S^1$ als starken Deformationsretrakt. Darum ist $\pi_1(A \cap B) \cong \mathbb{Z}$, und das Bild der Erzeugenddn in $\pi_1(A)$ ist die Homotopieklasse der Schleife $\gamma(\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1})\gamma^-$. Es folgt, dass $N = \langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle$, und durch den Satz von Seifert und van Kampen:

$$\pi_1\left(T^2\right) \cong {(\pi_1(A) * \pi_1(B))}/{N} = {\pi_1(A)}/{N} \cong {(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})}/{N} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

(b) Der Beweis ist sehr änlich. Wir beschreiben die Kleinsche Flasche als Quotientenraum: $K := Q/\sim$, wobei $(x,-1) \sim (x,1)$ und $(-1,y) \sim (1,-y)$ für jede $x, y \in [-1,1]$ (siehe unten).



Wir wählen nochmals $A := K \setminus \{p\}$ und $B := \operatorname{int}(Q)/\sim$, und mit die gleiche Argumente rechnen:

$$\pi_1(B) \cong \{1\}; \quad \pi_1(A) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a \rangle * \langle b \rangle; \quad N = \langle\langle aba^{-1}b \rangle\rangle.$$

Darum

$$\pi_1(K) \cong {(\pi_1(A) * \pi_1(B))}\big/{N} = {\pi_1(A)}\big/{N} \cong {(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})}\big/{N}.$$

Diese Gruppe ist Isomorph zum semidirekten Produkt $\mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, wobei $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times : n \mapsto (-1)^n$. Das heisst, die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit Multiplikation $(x, y) \cdot (x', y') = (x + (-1)^y x', y + y')$. Der Isomorphismus kann wie folgt konstruiert werden: der Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z} : a \mapsto (0, 1), b \mapsto (1, 0)$ induziert einen wohldefinierten Homomorphismus $\overline{\varphi} : (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})/N \to \mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, weil

$$\varphi(aba^{-1}b) = (0, 1) \cdot (1, 0) \cdot (0, -1) \cdot (1, 0) = (-1, 0) \cdot (1, 0) = (0, 0).$$

Mann kann dann zeigen, dass $\overline{\varphi}$ ein Isomorphismus ist. Diese Gruppe ist normalerweise *Klein bottle group* genannt.

5. Sei $g \geq 2$. Wir definieren die *geschlossene, orientierbare Fläche* Σ_g *vom Geschlecht* g als Quotientenraum eines Polygons wie folgt. Sei P_{4g} ein (regelmäßiges) $4g$-seitiges Polygon, dessen Seiten im Uhrzeigersinn mit 0 bis $4g - 1$ nummeriert seien. Dann ist Σ_g die Fläche, die man aus P_{4g} erhält, indem man für alle $S = 0, 4, 8, \dots, 4(g-1)$ und für alle $S = 1, 5, 9, \dots, 4(g-1) + 1$ die im Uhrzeigersinn parametrisierte Seite S mit der im Gegenuhrzeigersinn parametrisierten Seite $S + 2$ identifiziert. (∗)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Sigma_g)$.

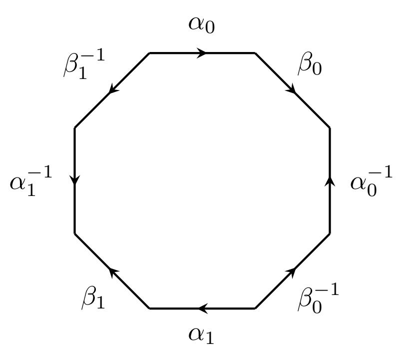


Abbildung 1: Beispiel für die Konstruktion von Σ_g durch Identifikation der Seiten eines $4g$-seitigen Polygons im Fall $g = 2$

6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X mit (∗)

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$