Serie 1

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Sei X eine Menge.
   (a) Zeigen Sie, dass die kofinite Topologie
   $$\mathcal{O}_{\text{cofin}} = \{U \subseteq X \mid X \setminus U \text{ ist endlich oder } U \text{ ist die leere Menge}\}$$
   eine Topologie von X ist.
   (b) Für welche Mengen X bildet die Menge aller endlicher Teilmengen eine Topologie?

2. (a) Sei $X = \{a, b, c, d\}$ eine Menge bestehend aus vier paarweise verschiedenen Elementen. Welche der folgenden Mengen sind Topologien für X?
   (i) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}$
   (ii) $\{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}\}$
   (iii) $\{\emptyset, X, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$
   (b) Seien a, b und c paarweise verschieden. Geben Sie jeweils alle Topologien auf X an, wobei
   (i) $X = \{a\}$,
   (ii) $X = \{a, b\}$,
   (iii) $X = \{a, b, c\}$.
   (c) Sei X eine endliche Menge. Beschreiben Sie alle Topologien auf X, die von einer Metrik induziert werden.

3. Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subseteq X$ eine Menge.
   (a) Zeigen Sie, dass das Innere $\mathring{A}$ die größte in A enthaltene offene Menge ist, d.h. $\mathring{A}$ ist offen und für jede offene Menge $B \subseteq A$ gilt $B \subseteq \mathring{A}$.
   (b) Zeigen Sie, dass die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält, d.h. $\overline{A}$ ist abgeschlossen und für jede abgeschlossene Menge B mit $B \supseteq A$ gilt $B \supseteq \overline{A}$.

4. (Alternative Definition einer Topologie) Sei X eine Menge und es bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Eine Abbildung $\overline{} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ erfüllt die *Kuratowskischen Hüllenaxiome*, falls gilt
   H_1: $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
   H_2: $A \subset \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$,
   H_3: $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ für alle $A \subseteq X$,
   H_4: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ für alle $A, B \subseteq X$.
   (a) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass dann „Abschluss bilden“ die Kuratowskischen Hüllenaxiome erfüllt.
   (b) Es sei eine Abbildung $\overline{} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ gegeben, welche die Kuratowskischen Hüllenaxiome erfüllt. Zeigen Sie, dass es genau eine Topologie auf X gibt, sodass $\overline{}$ gerade dem „Abschluss bilden“ bezüglich dieser Topologie entspricht.

5. Sei (X, d_X) ein metrischer Raum.
   (a) Zeigen Sie, dass die Topologie $\mathcal{O}(d_X)$ des metrischen Raumes (X, d_X) eine Topologie ist.

(b) Zeigen Sie, dass die „offene Kugel“ $\{x \mid d_X(x, x_0) < \epsilon\}$ für jedes $\epsilon > 0$ und für alle $x_0 \in X$ offen ist.

Sei nun (Y, d_Y) ein weiterer metrischer Raum und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir betrachten X und Y mit den zugehörigen Topologien $\mathcal{O}(d_X)$ und $\mathcal{O}(d_Y)$.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ gilt: f ist stetig[1] in x genau dann, wenn für jede Umgebung V von $f(x)$ eine Umgebung U von x existiert, so dass $f(U) \subseteq V$.

(d) Zeigen Sie, dass f stetig[2] ist genau dann, wenn für alle offenen Mengen $V \subseteq Y$ gilt, dass die Menge $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist.

6. (a) Zeigen Sie, dass es keine stetige[3] Bijektion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ gibt.

   (b) Zeigen Sie, dass es eine stetige Bijektion von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}$ gibt, deren Umkehrabbildung stetig ist. $(*)$

[1] Benutzen Sie die aus der Analysis 1 – Vorlesung übliche $\epsilon - \delta$ – Definition der Stetigkeit.
[2] Benutzen Sie wiederum die $\epsilon - \delta$ – Definition der Stetigkeit.
[3] Benutzen Sie wiederum die $\epsilon - \delta$ – Definition der Stetigkeit.