Serie 10

Hinweis: Mit einem Stern ($*$) gekennzeichnete Aufgaben sind besonders schwierig.

1. Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. es existiert eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$). Zeigen Sie, dass jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, separabel ist.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ mit der kofiniten Topologie nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

3. Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von Hausdorffräumen. Zeigen Sie, dass dann $\displaystyle\prod_{j\in J} X_j$ ein Hausdorffraum ist.

4. Sei $\{X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von topologischen Räumen und $X = \displaystyle\prod_{j\in J} X_j$.

   (a) Zeigen Sie, dass X die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $\{f_j \colon Y \to X_j\}_{j\in J}$ eine Familie von stetigen Abbildungen, so gibt es genau eine stetige Abbildung $f \colon Y \to X$ mit $\pi_j \circ f = f_j$ für alle $j \in J$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Produkttopologie τ die gröbste Topologie auf X ist, für welche die Projektionen $\pi_k \colon X \to X_k$, $k \in J$, alle stetig sind, d.h. ist $\mathcal{O}$ eine Topologie von X, für die die Projektionen alle stetig sind, so gilt $\tau \subseteq \mathcal{O}$.

5. Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\}$ versehen mit der Topologie

$$\begin{aligned}\mathcal{O} = &\big\{U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \mid 0 \notin U\big\} \cup \big\{\, (U \setminus \{0\}) \cup \{0_1\} \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, 0 \in U\big\}\\ &\big\{\, (U \setminus \{0\}) \cup \{0_2\} \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, 0 \in U\big\} \cup \big\{(U \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\} \mid U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}}, 0 \in U\big\}.\end{aligned}$$

   Intuitiv ist X die reelle Gerade, wobei der Ursprung 0 durch zwei verschiedene Punkte 0_1 und 0_2 ersetzt wurde. Zeigen Sie, dass X kein Hausdorffraum ist, aber folgendes gilt: X erfüllt das 2. AA und jeder Punkt in X hat eine Umgebung welche homeomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

   Hinweis: Sie habe damit gezeigt, dass X zwei der drei Mannigfaltigkeitsaxiome erfüllt.

6. Sei X ein topologischer Raum, J eine Menge und $X^J = \{\varphi \mid \varphi \colon J \to X\}$ trage die Produkttopologie. Sei weiter $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in X^J und sei $\varphi \in X^J$. Zeigen Sie: φ ist Grenzwert der Folge $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ in X^J genau dann, wenn $\varphi(j)$ Grenzwert der Folge $(\varphi_n(j))_{n=1}^{\infty}$ ist für alle $j \in J$.

7. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ ein Homöomorphismus $f \colon [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ mit $f(x) = y$ existiert, d.h. scheinbare „Randpunkte“ wie z.B. die „Ecke“ $\{0\}_{n\in\mathbb{N}}$ unterscheiden sich nicht qualitativ von „inneren Punkten“ wie $\{0.5\}_{n\in\mathbb{N}}$. ($*$)