Serie 11

1. Zeigen Sie, dass das Urysohnsche Lemma aus dem Tietzeschen Erweiterungslemma folgt.
2. Sei X ein zusammenhängender normaler Hausdorffraum mit mindestens zwei Punkten. Zeigen Sie, dass X überabzählbar ist.
3. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) Ein Unterraum eines T_3-Raums ist wieder ein T_3-Raum.
   (b) Ein abgeschlossener Unterraum eines T_4-Raums ist wieder ein T_4-Raum.
4. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
   (a) X ist ein T_4-Raum genau dann, wenn X normal und ein T_1-Raum ist.
   (b) Falls X ein kompakter T_2-Raum ist, dann ist X normal (also insbesondere ein T_4-Raum).
5. Sei (X, d) ein metrischer Raum.
   (a) Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Funktion $\delta\colon X \to [0, \infty)$ gegeben durch
   $$x \mapsto d(x, A) := \inf_{y \in A} |d(x, y)|$$
   stetig ist und dass $\delta(x) > 0$ für alle $x \notin A$ gilt. Wo gibt es ein Problem, wenn A nicht abgeschlossen ist?
   (b) Zeigen Sie das Urysohnsche Lemma für den metrischen Raum X ohne auf die Sätze oder Ideen der Vorlesungen aus der Woche 11 zu verweisen.
6. Zeigen Sie, dass das Möbiusband nicht zum Zylinder $S^1 \times [0, 1]$ homöomorph ist. $(*)$