Serie 14

Hinweise: Die Aufgaben $6-9$ sind zur Wiederholung auch des älteren Stoffs aus der Vorlesung gedacht. Diese Serie können Sie nicht zur Korrektur einreichen.

1. Sei X ein einfach zusammenhängender Raum. Dann ist X semilokal einfach zusammenhängend.

2. Sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $x \in X$ und jede Umgebung U von x eine offene wegzusammenhängende Umgebung $\widetilde{U}$ von x mit $\widetilde{U} \subseteq U$ existiert.

3. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X durch das explizite Angeben der Elemente der Gruppe und die Identifikation mit einer Ihnen bekannten Gruppe, indem Sie die Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung von X bestimmen. Hierbei sei
   (a) $X = S^1$,
   (b) $X = S^1 \times S^1$.

4. Sei $n \geq 3$. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von $\mathbb{RP}^n \setminus \{x\}$ für $x \in \mathbb{RP}^n$.
   Bemerkung: Aufgabe 9 behandelt den Fall $n = 2$.

5. Sei $\pi\colon Y \to X$ eine Überlagerung mit wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden topologischen Räumen X und Y und sei $x_0 \in X$. Zeigen Sie: Die Überlagerung π ist normal genau dann, wenn $\mathrm{Deck}(\pi)$ transitiv auf den Fasern $\pi^{-1}(x_0)$ operiert.

6. Seien X und Y topologische Räume, die beide das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Zeigen Sie, dass dann auch $X \times Y$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt.

7. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist bezüglich der Euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}$ und der von der Topologie $\mathcal{O}(d)$ des metrischen Raumes induzierten Produkttopologie.

8. Sei X ein beliebiger topologischer Raum und sei Y ein Hausdorffraum. Weiter seien $f, g\colon X \to Y$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass
   $$\{x : f(x) = g(x)\}$$
   abgeschlossen ist.

9. Bestimmen Sie auf zwei verschiedene Arten (direkt mit dem Satz von Seifert und van Kampen und alternativ mit Überlagerungstheorie) die Fundamentalgruppe von $\mathbb{RP}^2 \setminus \{x\}$ für $x \in \mathbb{RP}^2$.